

**REVUE BELGE DE STATISTIQUE
ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

**Vol. 5 - N° 2
OCTOBRE 1964**

**BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK
EN OPERATIONEEL ONDERZOEK**

**Vol. 5 - N° 2
OCTOBER 1964**

La « Revue Belge de Statistique et de Recherche Opérationnelle » est publiée avec l'appui du Ministère de l'Education nationale et de la Culture, par les Sociétés suivantes :

SOGESCI. — Société Belge pour l'Application des Méthodes scientifiques de Gestion.
Secrétariat : 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6. Tél. 37.19.76.

S.B.S. — Société Belge de Statistique.
Siège social : 44, rue de Louvain, Bruxelles.
Secrétariat : 44, rue de Louvain, Bruxelles.

Comité de Direction

E. DE GRANDE, Docteur en Sciences, Theopliel Reynlaan, 53, Mortsel.

S. MORNARD, Licencié en Sciences, rue Souveraine, 51, Bruxelles 5.

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18.

Comité de Screening

A. HEYVAERT, Ingénieur civil, 3, Val-Fleuri, Dilbeek.

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18.

Rédaction

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18.

Secrétariat

J.H. LENTZEN, 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6 - Tél. 37.19.76.

Het « Belgisch Tijdschrift voor Statistiek en Operationeel Onderzoek » wordt uitgegeven met de steun van het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, door de volgende Verenigingen :

SOGESCI. — Belgische Vereniging voor Toepassing van Wetenschappelijke Methodes in het Bedrijfsbeheer.

Secretariaat : Neufchâtelstraat 66, Brussel 6. Tel. 37.19.76.

S.B.S. — Belgische Vereniging voor Statistiek.

Maatschappelijke zetel : 44, Leuvensestraat, Brussel.

Secretariaat : 44, Leuvensestraat, Brussel.

Directie Comité

E. DE GRANDE, Dr in de Wetenschappen, Theopliel Reynlaan, 53, Mortsel.

S. MORNARD, Lic. in de Wetenschappen, Souverainestraat, 51, Brussel 5.

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Screening Comité

A. HEYVAERT, Burgerlijk Ingenieur, Bloemendal, 3, Dilbeek.

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Redactie

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Secretariaat

J.H. LENTZEN, 66 Neufchâtelstraat, Brussel 6 - Tel. 37.19.76.

REVUE BELGE DE STATISTIQUE ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

VOL. 5 - N° 2 - OCTOBRE 1964

VOL. 5 - Nr 2 - OCTOBER 1964

SOMMAIRE — INHOUD

P. ROUSSEAU. — Usage du Pert/Cost pour l'établissement des plannings de fabrication	3
R. SNEYERS. — Sur la précision des mesures de la radioactivité d'un corps	19
Publications reçues — Ontvangen publicaties	32

BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK
EN OPERATIONEEL ONDERZOEK

USAGE DU PERT/COST POUR L'ETABLISSEMENT DES PLANNINGS DE FABRICATION

par P. ROUSSEAU
M.B.L.E., Bruxelles.

0 Introduction.

Après avoir assisté aux exposés sur la « Gestion de la Production » organisés à la Faculté Polytechnique de Mons, l'auteur a remis comme travail de fin d'études un mémoire sur l'application de la méthode PERT/COST à des fabrications hétérogènes, et sur la conception et la réalisation d'un simulateur électronique permettant de trouver instantanément les solutions optimales dans les problèmes de délai et de planning d'exécution.

Ce premier article expose quelques cas particuliers rencontrés dans l'application de la méthode. Le principe et le fonctionnement du simulateur seront exposés dans un prochain article.

1 Généralités.

1.1 — La méthode de planning et de surveillance connue sous le sigle « PERT » (Program Evaluation and Review Task) a connu une grande diffusion aux U.S.A. et vient d'être officialisée par le Département de la Défense de ce pays, qui l'impose pratiquement à ses fournisseurs importants.

1.2 — La méthode PERT/COST qui permet la détermination, non seulement des délais normaux, mais aussi des dépenses minima entraînées par une réduction de délai, ne semble avoir été appliquée avec succès qu'aux réalisations ne comprenant que des activités « successives ». La littérature spécialisée expose la façon de traiter les « activités simultanées » dans le cas du PERT simple (calcul des seuls délais normaux) mais nous n'y avons trouvé aucune indication sur la façon d'introduire ces activités lorsqu'on complète la méthode par l'évaluation des coûts optima de réduction de délai. Or la méthode préconisée pour le PERT simple est incompatible avec le traitement du PERT/COST. Ceci fera l'objet du premier point de l'exposé.

1.3 — Une partie des difficultés rencontrées dans l'établissement d'un graphe vient de l'absence de définition de ce que l'on entend par « activité ».

Une activité peut n'être qu'un geste, qu'un transport d'un atelier à un autre, ou être un groupement d'activités aboutissant à une réalisation formant un tout, en passant par tous les niveaux intermédiaires.

Le choix des subdivisions d'activité dépendra en partie de la précision que l'on désire obtenir dans la détermination du délai, et surtout des informations que l'on désire obtenir du graphe : planning des investissements, délais de livraison à exiger des fournisseurs, effectifs à mettre en jeu, charge des machines, etc.

Nous en arriverons ainsi à la méthode des « graphes condensés », comprenant au maximum une centaine d'activités, quelle que soit la complexité d'une réalisation.

1.4 — Parmi les autres difficultés d'application de la méthode PERT le tracé du graphe et la numérotation des événements sont souvent cités.

Or le tracé du graphe représente l'intérêt principal de la méthode. Ce graphe est le seul moyen de mettre de l'ordre dans les idées et d'amener le maître de l'œuvre à réaliser l'interdépendance des activités. Le tracé exige la connaissance parfaite de l'œuvre à réaliser et de la méthode PERT. Ces connaissances étant rarement réunies en un seul individu, le tracé du graphe doit être le résultat d'un travail en équipe.

Une numérotation des événements doit être souple afin de permettre, sans révision de la numérotation initiale, à la fois d'introduire ultérieurement des liaisons imprévisibles et une indexation des corporations.

Lorsque des réalisations successives présentent suffisamment de similitudes, le travail se simplifie et un graphe existant peut, moyennant de légères modifications, être réutilisé.

Nous exposerons la façon de tracer un « graphe permanent » valable pratiquement pour toutes les fabrications d'une entreprise.

Disons enfin que l'emploi d'un simulateur pour calculer les incidences financières d'une réduction de délai permet d'éviter les difficultés inhérentes à l'établissement d'une numérotation en vue d'un traitement sur ordinateur. La numérotation peut être quelconque, ou ne tenir compte que d'une indexation par atelier intervenant.

D'une façon générale, nous traiterons le cas d'application de la méthode PERT/COST aux fabrications sur commandes de matériel électro-mécanique et électronique, par séries de une à cent pièces, avec livraisons échelonnées.

Les principes généraux de la méthode PERT sont supposés connus.

2 Représentation des activités simultanées.

Nous entendons par « activités simultanées » une suite d'activités qui peuvent être entamées avant que celles qui les précèdent ne soient entièrement terminées.

Dans la construction par exemple, le plafonnage suit la pose des canalisations électriques. Si le bâtiment comprend un nombre de locaux, il n'est pas nécessaire d'attendre que toutes les canalisations soient placées pour commencer le plafonnage. Ce plafonnage ne pourra cependant commencer que lorsqu'un local, au moins, aura toutes ses canalisations, et ne pourra se terminer qu'après la pose des dernières canalisations, dans le dernier local.

2.1 — Pour rester dans le domaine qui nous intéresse, nous traiterons un cas simplifié à l'extrême, ne comportant que deux activités à exercer sur une série de 100 pièces.

A. — Façonnage (durée estimée 32 semaines)

B. — Finition (durée estimée 20 semaines)

Pour des raisons économiques on considérera que la finition ne peut être exécutée que par lots de 10 pièces minimum.

D'autre part une première livraison de 20 pièces doit être effectuée après 14 semaines.

Le restant des livraisons s'échelonne par lots de 20 pièces jusqu'à la 34^e semaine.

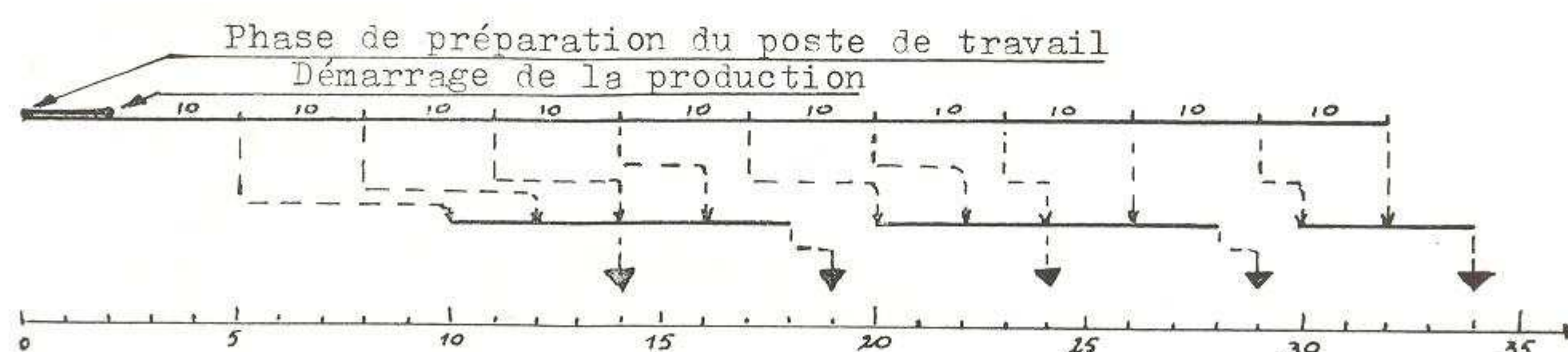


Fig. 1. — Séquence réelle des activités simultanées.

Si l'on a estimé qu'il faudrait 32 semaines pour façonner 100 pièces, cela ne signifie pas que les 10 premières pièces sortiront après 3,2 semaines. Le lancement d'un travail exige une préparation, des montages d'outillage, etc.

Attribuons 2 deux semaines pour ces travaux préliminaires.

La séquence probable des opérations, représentée en graphique de Gantt nous donne la figure 1.

Cette séquence permet de regrouper au maximum les opérations de finition tout en respectant les délais.

2.2 — La façon usuelle de tracer le graphe correspondant est donnée par la figure 2.

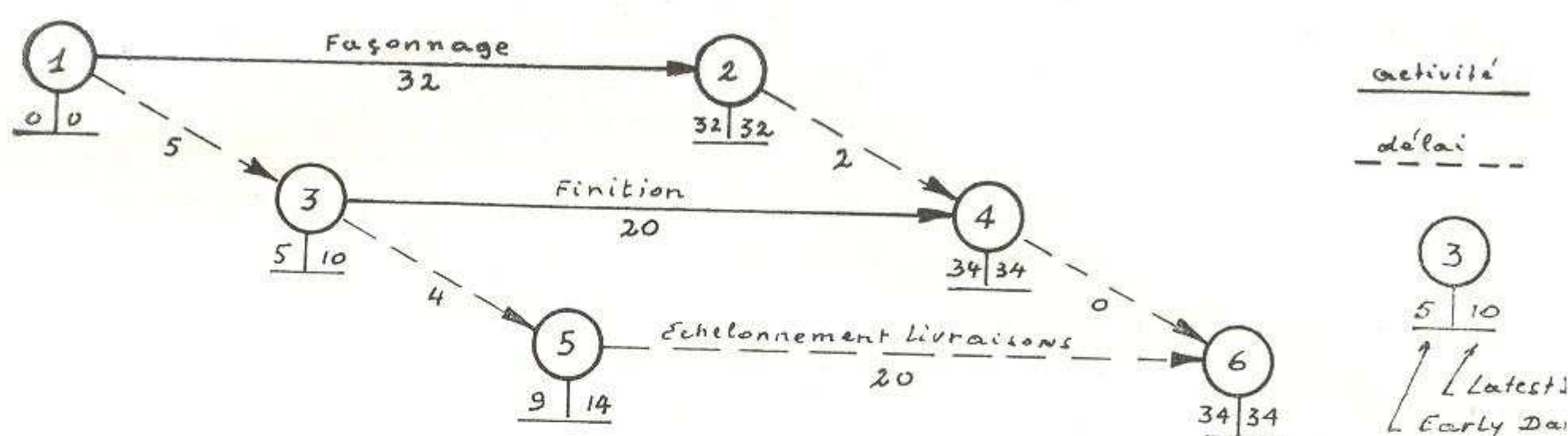


Fig. 2. — PERT usuel des activités simultanées.

- 1-3 Délai de sortie façonnage des 10 premières pièces
- 2-4 Délai de finition du dernier lot de 10 pièces
- 3-5 Délai de finition du premier lot de 10 pièces.

D'après le graphe de la figure 2, l'activité 3-4 a un flottement libre de $(34-5) - 20 = 9$ semaines.

En réalité ce flottement libre n'a plus guère de signification. Si, tenant compte que 3-4 a une durée de 20 et doit être terminé à 34 nous entamerons cette activité à son « latest start » théorique de 14, la première série de 20 pièces ne serait livrable qu'à 18 soit avec 4 semaines de retard.

De même si nous voulons faire démarrer 3-4 à son « Early Start » de 5 nous obtiendrons un « Early Finish » de 25, ce qui est impossible puisque des pièces façonnées ne seront livrées qu'après cette date et que la finition devra certainement travailler de 30 à 34.

Le « Early Date » calculé pour l'événement 5 est également erroné.

2.3 — L'ordinateur sort normalement, pour chaque atelier, des tableaux donnant l'évolution des charges, des effectifs bloqués, des investissements, etc. (fig. 3).

Les chiffres se situent dans le tableau de façon à ce que celui-ci constitue un diagramme de Gantt.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Charge Finition					4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Total chargé	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
b) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Charge Finition															4	4	4	4
Total chargé	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	9	9	9	9
c) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Charge Finition											4	4	4	4	4	4	4	4
Total chargé	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	9	9
d) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Charge Finition											4	4	4	4				
Total chargé	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	9	9	9	9	5	5	5	5

Semaine	19	20	21	22	23	24	25	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
a) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5				
Charge Finition	4	4	4	4	4	4	4	4											
Total chargé	9	9	9	9	9	9	9	9	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0
b) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5				
Charge Finition	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
Total chargé	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	4	4	0	0
c) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5				
Charge Finition			4	4	4	4	4	4	4	4				4	4	4	4		
Total chargé	5	5	9	9	9	9	9	9	9	9	5	5	9	9	9	4	4	0	0
d) Charge Façonnage	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5				
Charge Finition	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
Total chargé	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	4	4	0	0

Fig. 3. — Graphiques de Gantt et Tableaux de charge fournis par l'ordinateur pour différentes représentations.

- a) Activités situées entre Early Start et Early Finish, selon graphe figure 2.
b) Activités situées entre Latest Start et Latest Finish, selon graphe figure 2.
c) Activité « Finition » répartie selon la séquence de la figure 1.
d) Graphe figure 4 d) Activités finition situées entre Latest Start et Latest Finish.

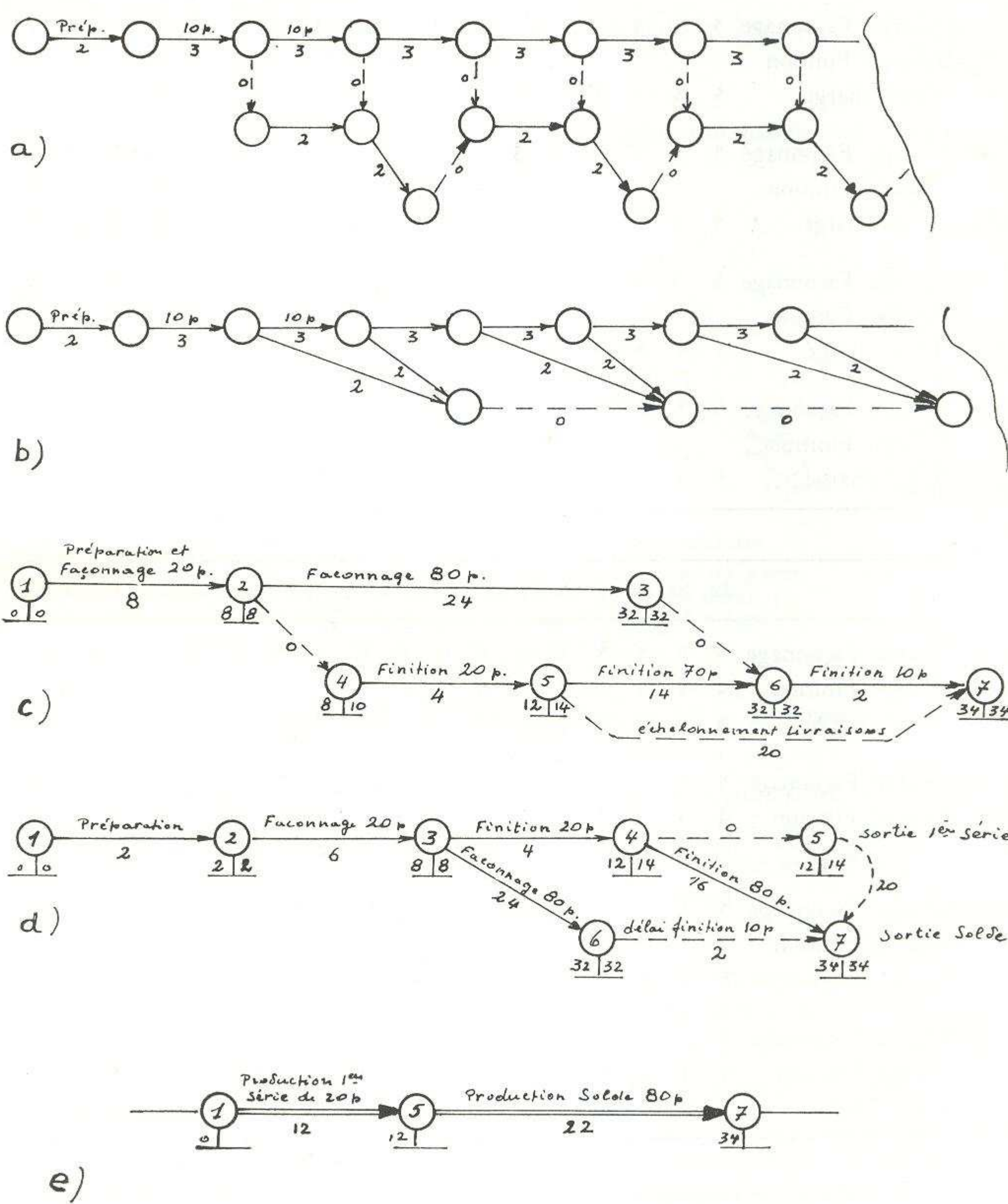


Fig. 4. — Variantes des graphes d'activités simultanées.

Si Façonnage et Finition se font dans un même atelier et que les durées de 32 et 20 ont été calculées sur base d'un effectif affecté de 5 et 4 hommes respectivement, l'ordinateur sortira l'un ou l'autre des tableaux a) et b) de la figure 3.

Le tableau c) correspond à la séquence résultant de la figure 1.

Les résultats peuvent amener à des différences inadmissibles.

2.4 — Au point de vue PERT/COST, nous devons affecter aux activités 1-2 et 3-4 des gradients de coût si nous admettons que leurs durées peuvent être comprimées.

Une compression de durée de 3-4 entraîne automatiquement une réduction des durées affectées à 2-4 et 3-5, sans que nous puissions affecter un gradient de coût à ces délais, puisque toutes les dépenses supplémentaires sont affectées à l'activité 3-4.

Il y a donc incompatibilité entre la présentation de la figure 2 et l'emploi du PERT/COST. Cette présentation a cependant l'avantage d'être simple et de ne pas scinder les activités.

Nous l'employons encore pour les activités d'ateliers secondaires, activités généralement incompressibles exécutées dans des ateliers dont l'effectif est souple.

2.5 — Les autres présentations du graphe sont reprises à la figure 4.

Les présentations a) et b) sont rigoureuses mais très complexes et ne se justifient que lorsque des montants exceptionnellement élevés sont en jeu.

La présentation c) est moins rigoureuse mais plus simple.

Nous adoptons en général la présentation mixte d) qui contient encore un « délai actif » 6-7 correspondant au temps nécessaire à la finition de la dernière série de 10 pièces. Comme en général ce dernier délai est incompressible, aucune erreur n'est introduite dans le PERT/COST.

Pour le calcul des charges, investissements, etc., les activités : « Finitions première série (3-4) » et « Finition solde (4-7) » de la figure 4 d sont indexées de façon à ce que l'ordinateur les situe entre leurs « Latest Start » et « Latest Finish ». Le résultat est reporté sur la figure 3 d et montre que, tant du point de vue « tracé du Gantt » que du point de vue « Charges », le résultat est nettement meilleur que celui donné par le tracé de la figure 2.

2.6 — Le graphe de la figure 4 d s'applique à un groupe de pièces constituant un sous-ensemble d'un ensemble complexe.

Il peut donc apparaître de nombreuses fois dans le graphe général et compliquer sérieusement celui-ci.

La figure 4 e montre la forme « condensée » du graphe d).

On remarquera que la numérotation des sommets a été conservée et que les durées affectées aux « arcs condensés » correspondent aux différences entre les « Early Date » des sommets correspondants. Ce procédé de condensation sera expliqué en détail au chapitre suivant.

3 Graphes condensés.

3.1 — Un graphe doit être un outil de travail facile à manipuler.

En cours de production, de nombreux facteurs imprévisibles ou négligés au départ viennent modifier le planning initial. Le graphe doit permettre d'évaluer immédiatement l'influence de ces perturbations.

Or, même lorsque l'entreprise possède son propre ordinateur, celui-ci n'est pratiquement jamais disponible au moment où on le souhaite.

Il faut donc que le graphe soit manipulable à la main. Le nombre d'arcs doit être limité à une centaine pour que cette condition soit remplie.

Comme il faut se réserver la possibilité d'introduire des « contraintes de charges » nous pensons que le nombre d'activités doit se situer entre 50 et 80 pour que l'outil soit manipulable et vraiment utile.

Un graphe doit également être accessible à la Direction générale qui ne désire pas se perdre dans les détails de ce qui se passe dans chaque atelier.

3.2 — Or, pour que les résultats soient précis, il faut que le graphe tienne compte de toutes les activités qui peuvent influencer de façons différentes les délais, les investissements, les effectifs, etc.

Ces activités peuvent être au nombre de plusieurs centaines, sinon de plusieurs milliers.

Si, bien que possédant un atelier de construction mécanique, l'entreprise décidait de commander un groupe de pièces à une firme extérieure, le graphe de production ne comprendrait que deux arcs pour ce groupe de pièces.

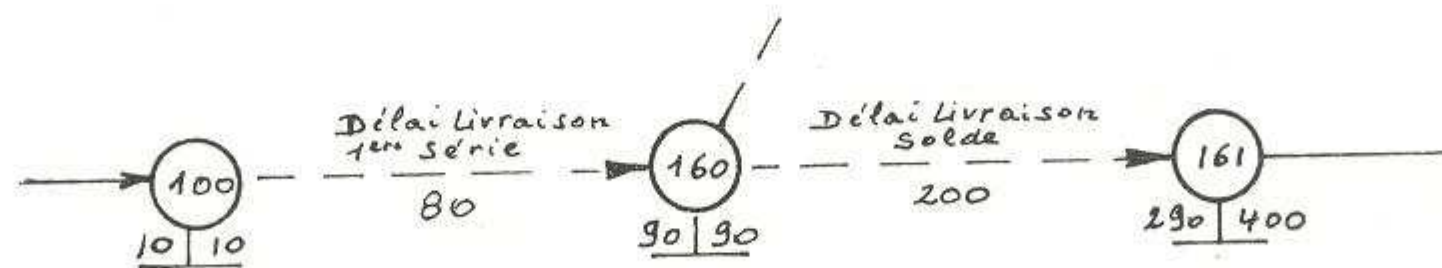


Fig. 5. — Représentation d'une commande extérieure

La firme exécutante par contre prendrait ses engagements sur base du graphe de la figure 6, comprenant 11 activités et 11 délais.

Dans le graphe condensé, ces 22 arcs sont remplacés par 2 arcs.

Un graphe condensé peut donc être assimilé à un « graphe de Direction » qui serait tracé si tout ou partie des fabrications étaient confiées à des sous-traitants.

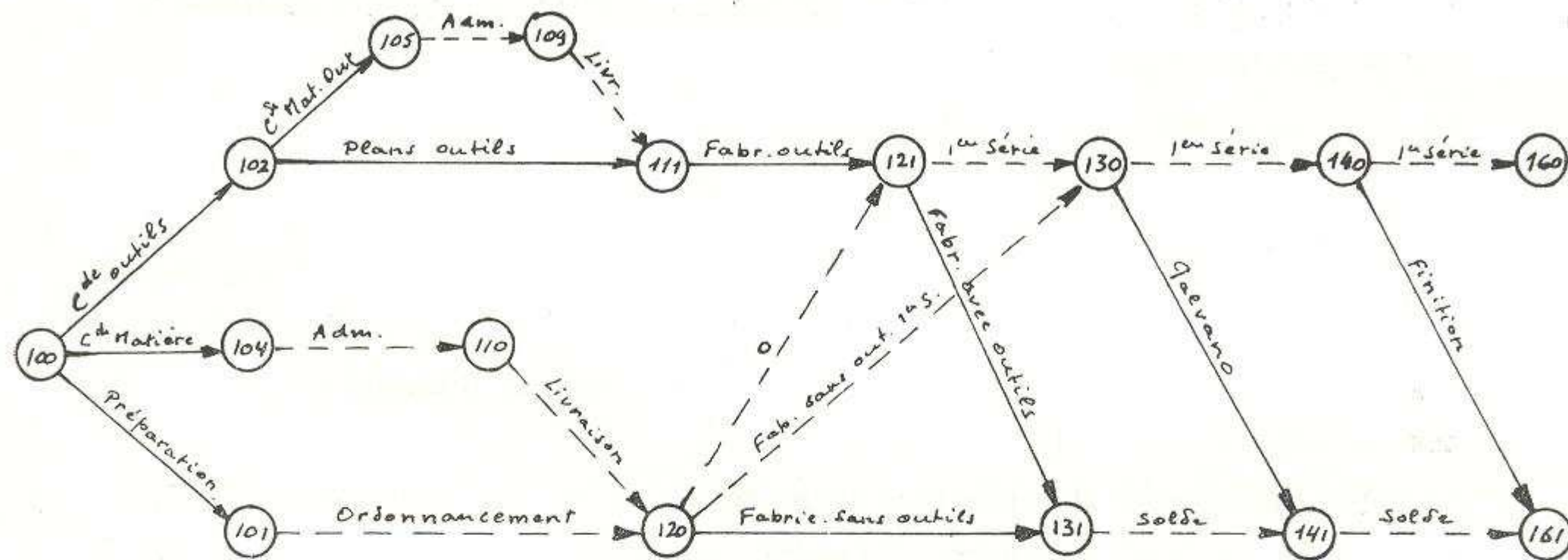


Fig. 6. — Graphe particulier à un atelier ou sous-traitant.

Le graphe à manipuler sera de 5 à 10 fois moins conséquent que s'il représentait toutes les activités.

3.3 — L'introduction des contraintes de charge se fait de la façon suivante :

Supposons que la fabrication d'une pièce exige l'emploi d'une machine spécifique qui est chargée jusqu'à la 12^e semaine. Cette charge est introduite sous forme d'une contrainte allant de l'événement initial 1 jusqu'à l'événement 121 de la figure 6. Or, l'événement 121 n'apparaît pas sur le graphe condensé de la figure 5.

Nous devons donc l'y ajouter et nous aurons la figure 7 dans laquelle le délai 121-160 a une durée correspondante à la différence des « Early Dates » des événements 121 et 160.

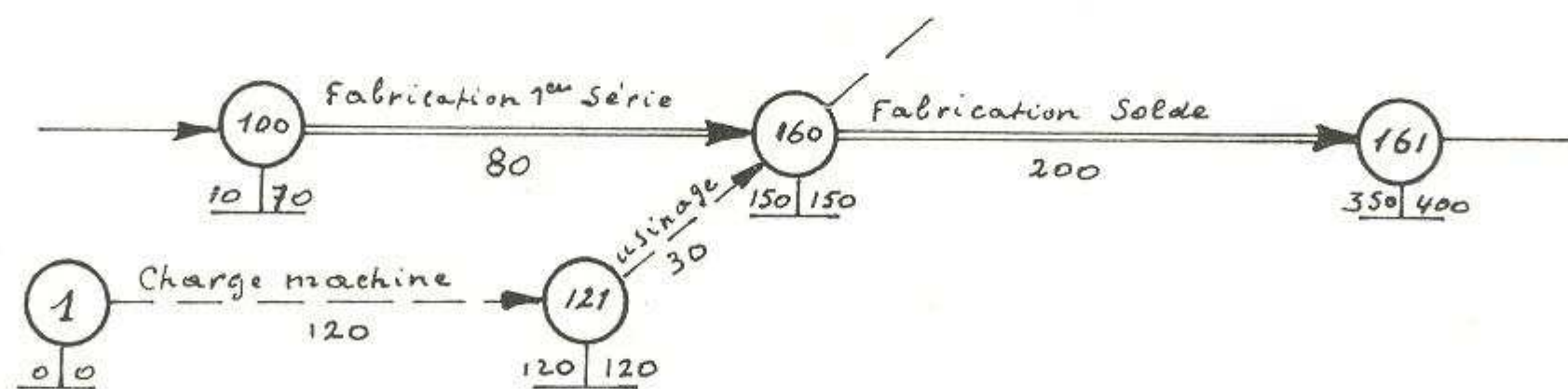


Fig. 7. — Introduction d'une contrainte de charge dans un graphe condensé.

Un procédé plus rapide pourrait être utilisé en PERT simple, mais en PERT/COST il faut permettre d'introduire la compressibilité de la contrainte 1-121 par exécution d'heures supplémentaires sur la machine en cause.

3.4 — Le graphe condensé conserve la numérotation des événements terminaux des graphes d'ateliers.

Cela permet, lorsqu'on veut effectuer une vérification précise sur ordinateur, de faire traiter à celui-ci le graphe complet et de reporter les résultats sur le graphe condensé.

3.5 — Lors de discussions sur la politique d'exécution d'une commande, seul le graphe condensé est utilisé. Or, la loi de coût supplémentaire en fonction des compressions des activités 100-160 et 160-161 est la résultante des coûts de compression de toutes les activités du graphe de la figure 6. Elle affectera une forme complexe. Nous verrons plus tard comment résoudre ce problème sur simulateur.

Sur ordinateur, des relations complexes « coûts de compression - durée » ne pouvant pas être introduites, il faudra chaque fois traiter le graphe complet.

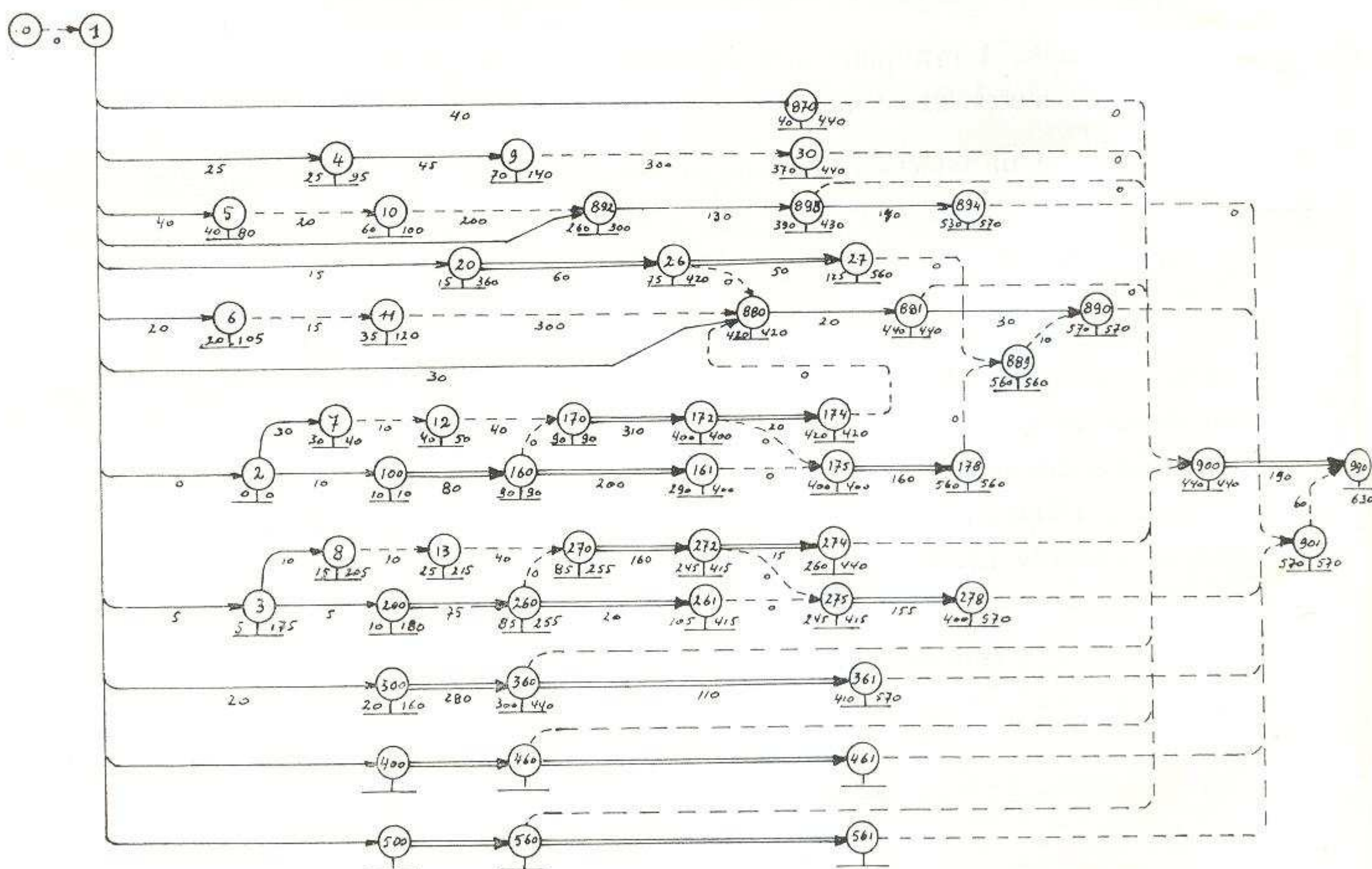


Fig. 8. — Graphe de Direction ou « graphe condensé ».

3.6 — La figure 8 montre un graphe condensé couvrant l'ensemble d'une commande. Chaque activité représentée par un double trait remplace tout ou partie d'un graphe de fabrication analogue à celui de la figure 6.

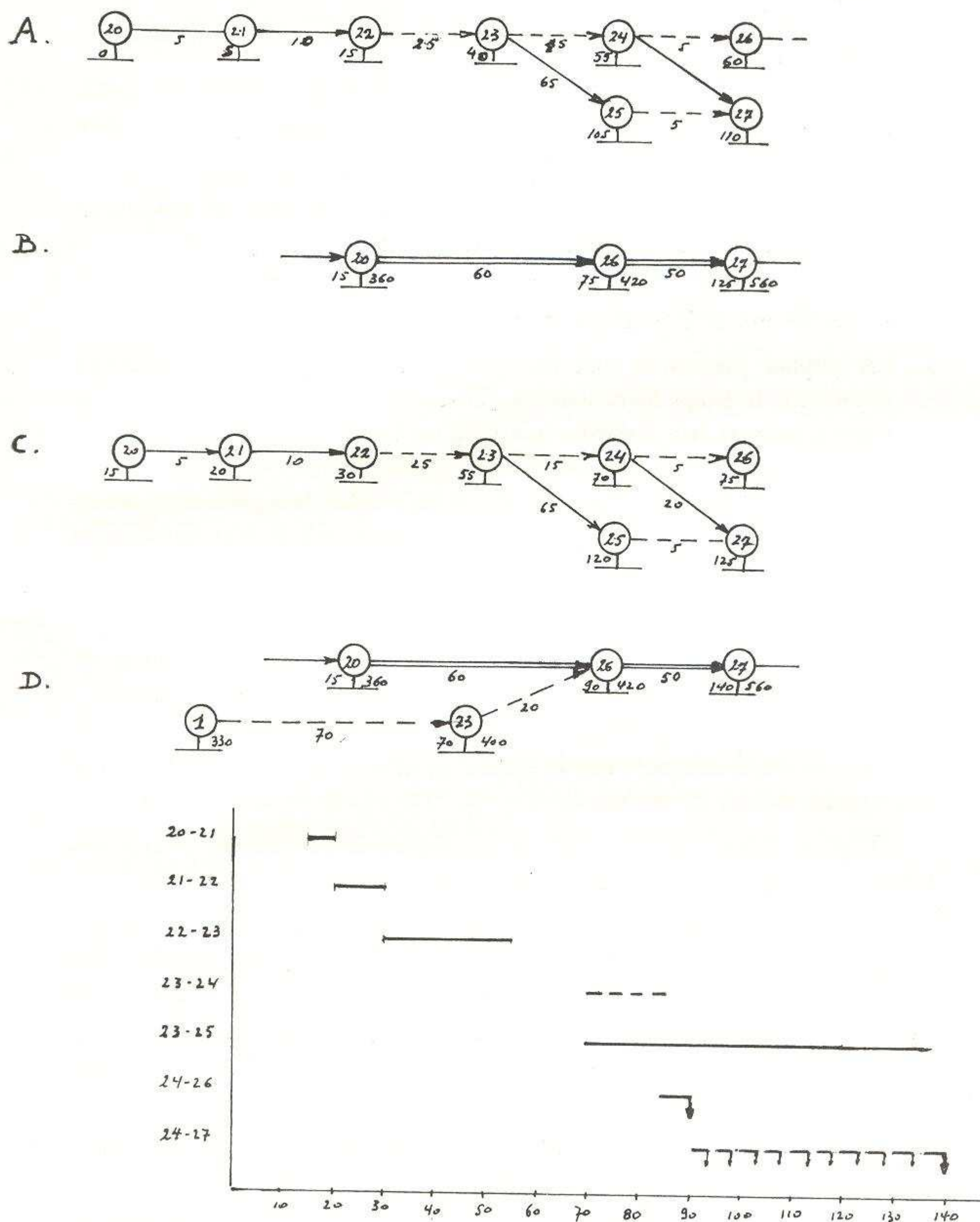


Fig. 9. — Etapes d'établissement d'un délai de fabrication.

L'étude des délais initiaux se fait de la façon suivante (fig. 9) :

- A. Chaque section de fabrication établit son « graphe particulier » en partant de son propre événement initial et introduit les durées comme si machines, effectifs, locaux, etc. étaient disponibles.
A ce stade il est normal de faire abstraction de toute contrainte de charge puisque la section de fabrication ignore encore à quelle époque se situeront les activités reprises sur le graphe.
- B. Le Planning général recueille tous les graphes particuliers des ateliers, les condense et reporte les résultats sur le graphe général.
Il en tire les « Early Dates » et « Latest Dates » des événements initiaux et terminaux des graphes particuliers.
- C. Les graphes particuliers sont renvoyés aux ateliers qui peuvent cette fois situer dans le temps leurs activités, calculer leurs flottements et voir si les charges peuvent être absorbées aux époques fixées, compte tenu des flottements libres.
Si les charges ne peuvent pas être absorbées, l'atelier le signale au Planning général qui introduit les contraintes de charge et voit si cette introduction influence le délai final ou non.
Il y a discussion et prise de décision. Le graphe général devient exécutoire.
- D. Le graphe complet est passé à l'ordinateur qui en tire les graphiques de Gantt et les charges totales.

3.7 — On remarquera que le graphe général commence par une activité 0-1 appelée « délai de révision ».

Lors de l'établissement initial du graphe, on se fixe comme origine des temps une date quelconque, le 1^{er} janvier par exemple.

Si le graphe est établi au début de la 17^e semaine de l'année, on donnera la valeur 170 au délai 0-1. De cette façon les ED et LD correspondent à des dates calendrier bien déterminées et identiques pour tous les graphes. Les durées sont exprimées en 1/10^e de semaine (ou en demi-journées).

Si une révision de la situation est effectuée au début de la 32^e semaine, le délai 0-1 est porté à 320.

Les autres activités sont affectées d'une durée nulle si elles sont terminées lors de la révision, ou d'une durée réduite si elles sont entamées.

De cette façon, les ED et LD des événements gardent leurs correspondances avec les dates calendrier et les charges dues aux différentes commandes s'additionnent exactement.

4 Graphes permanents.

4.1 — Une entreprise dispose en général de plusieurs sections de fabrication (ateliers, sections, corporations, etc.).

Dans la majorité des cas, ces sections interviennent selon une séquence identique.

Une fonderie disposera par exemple des sections suivantes :

Bureau d'Etude
Bureau de Préparation
Modelage
Moulage
Fonderie
Atelier d'usinage
Atelier de Peinture.

L'intervention de ces sections peut se représenter sous la forme de la figure 10.

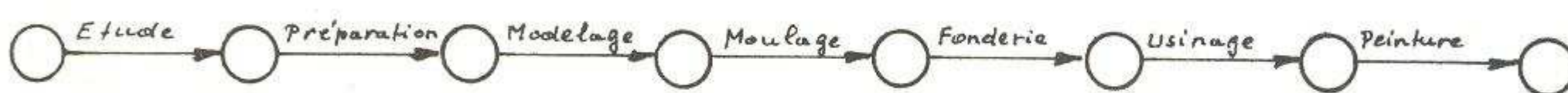


Fig. 10. — Exemple de séquence d'intervention.

Le même graphe peut être utilisé s'il se présente une pièce à couler pour laquelle un modèle existe. En principe, les activités « Etude » et « Modelage » ne doivent plus apparaître. On peut les laisser dans le graphe en leur affectant une durée de zéro.

En pratique, l'utilisation d'un graphe permanent présente un avantage non apparent à première vue : il empêche d'oublier d'introduire certaines activités.

Dans l'exemple ci-dessus, la présence de modèles ayant servi à une commande précédente n'implique pas la suppression totale de certaines activités, mais une forte réduction de la durée de celles-ci.

- Les Etudes devront vérifier les concordances.
- La Préparation devra reproduire les documents.
- Le Modelage devra vérifier l'état du modèle, le revernir ou le réparer.

L'usage d'un graphe standard évite l'oubli de ces interventions. Celui qui s'en sert a constamment devant les yeux tout ce qui pourrait être envisagé.

4.2. — Un graphe standard ou permanent représente à la fois la structure de l'entreprise, la séquence normale des opérations et les interconnexions entre activités relatives à des sous-ensembles.

Dans le graphe général et permanent de la figure 8, les chaînes d'activités partant de l'événement 003 et aboutissant en 274 et 278 représentent la fabrication de transformateurs (partie métallique, bobinage et finition).

S'il n'y a pas de transformateurs à placer dans l'ensemble commandé, ces chaînes peuvent être laissées dans le graphe, toutes les activités étant affectées d'une durée nulle.

Pour gagner du temps d'ordinateur, on peut aussi ne pas les introduire, mais en prenant soin de vérifier si, de ce fait, il ne reste aucune branche interrompue.

4.3 — Du fait de son caractère « permanent » un graphe standard peut demander plus de temps d'établissement que l'on ne pourrait économiquement y consacrer s'il devait être retracé à chaque commande.

On peut étudier une numérotation des événements telle qu'un indexage par atelier ou section soit réalisé.

Dans le graphe de la figure 8 par exemple, toutes les activités des ateliers mécaniques sont des graphes condensés dont l'événement initial porte un numéro de centaine : 100 200 ... 500.

De ce fait, en se reportant au graphe de la figure 6, on saura que toutes les activités de l'atelier d'outillage auront un événement initial se terminant par 11 : 111, 211, etc.

Il devient aisé de regrouper ces activités pour en tirer, soit un Gantt, soit une charge globale, soit un investissement global en outils pour chaque commande.

4.4 — La façon la plus aisée d'établir le graphe général permanent de production est de choisir parmi les commandes passées ou qui se présentent, une réalisation assez complexe, faisant intervenir plusieurs fois chaque section de fabrication.

Ces sections de fabrication seront considérées comme des sous-traitants ayant à établir eux-mêmes leurs propres graphes.

Les graphes permanents, particuliers à un atelier, seront établis également en partant de cas assez complexes rencontrés en pratique.

La numérotation des événements du graphe générale ne peut évidemment être établie que lorsqu'on dispose de tous les graphes d'atelier.

4.5 — Le choix des activités à considérer, ou à détailler pour le travail administratif sera influencé par l'organigramme de l'entreprise et par l'usage que l'on compte faire du graphe.

S'il doit servir, non seulement à établir un calendrier d'exécution, mais également à des évaluations de charge administrative, il faudra en tenir compte.

En voici un exemple :

L'activité « passer commande » a pour événement initial le moment où l'agent qui rédige la commande a toutes les informations nécessaires pour établir les spécifications, et pour événement final, le moment où le bon de commande est ouvert par le fournisseur. C'est en effet à la réception de la commande par le fournisseur que commence à courir le délai de livraison.

La durée à affecter à l'activité « passer commande » comprend donc une phase active pour le rédacteur et une phase passive pendant laquelle le document qu'il a rédigé circule pour signature, est passé au Service Achat qui lance des demandes de prix, etc. Il n'est donc pas possible d'affecter un effectif à cette durée.

Si l'on scinde l'activité en :

« Rédaction spécifications commande »

« Délai administratif de lancement de commande »,

il devient possible d'estimer séparément les durées de deux activités et d'affecter un effectif « rédacteur » à la première.

5 Conclusions.

L'établissement d'un graphe permanent de fabrication n'est pas un problème simple, et le résultat ne deviendra « permanent » qu'après avoir été remanié plusieurs fois en fonction d'applications pratiques.

Mais lorsque ce travail préliminaire est fait, l'application demande beaucoup moins de travail qu'il n'en fallait pour établir des plannings par les anciennes méthodes.

De plus, les plannings résultant des graphes sont plus détaillés et plus précis que ceux que l'on a coutume d'établir.

On peut se demander si ces performances sont bien utiles. On ne peut répondre par la négative que si l'expérience passée a montré que l'entreprise a toujours respecté sans difficulté les délais qu'elle avait promis à ses clients.

SUR LA PRECISION DES MESURES DE LA RADIOACTIVITE D'UN CORPS

par R. SNEYERS

Institut royal météorologique de Belgique

1. Introduction.

Dans le cadre de contacts établis au sein du groupe d'experts-techniciens désignés par les autorités compétentes des pays membres d'Euratom pour étudier le problème de la comparaison des appareils de mesure de la radioactivité atmosphérique (projet Grandjean) et en marge de la campagne de comparaisons entreprise par l'Institut royal météorologique, G. Ballot ⁽¹⁾ a fait à l'I.R.M., le 29 novembre 1963, un exposé sur les méthodes statistiques appliquées aux problèmes de la mesure de la radioactivité d'un corps, et à cette occasion il a présenté un abaque universel permettant d'établir rapidement les conditions expérimentales requises pour effectuer des mesures avec une précision donnée d'avance.

Au cours de la discussion qui a suivi cet exposé, ce problème a encore été réexaminé sous ses divers aspects et C. Levert ⁽²⁾ a décrit un nomogramme destiné aux mêmes usages, mais d'une forme différente.

Nous avons tenté, dans ce qui suit, de faire le point sur ce sujet à la lumière des échanges d'idées qui ont animé cette réunion et de caractériser l'abaque et le nomogramme cités afin de rendre plus aisé le choix qui s'offre ainsi aux utilisateurs éventuels.

Accessoirement, signalons que la théorie développée dans ce qui suit est applicable à toute mesure expérimentale effectuée au moyen d'un comptage d'impulsions, pour autant que la loi de distribution du nombre d'impulsions par unité de temps obéit à une loi de Poisson.

2. Généralités.

On sait que la radioactivité d'un corps se manifeste par l'émission de particules et d'un rayonnement électromagnétique provoqués par la désintégration de ses atomes. Aussi, pour mesurer la radioactivité d'un corps compte-t-on au moyen d'instruments appropriés les particules émises par ce corps et la

⁽¹⁾ Ingénieur au Service de Contrôle des Radiations et de Génie Radioactif. Commissariat à l'Energie Atomique, Saclay, France.

⁽²⁾ Climatologue, Kon. Ned. Met. Inst., De Bilt.

mesure finale s'obtient en appliquant au nombre enregistré, diminué du bruit de fond, un facteur préalablement déterminé par étalonnage.

On voit de cette manière que la mesure de la radioactivité d'un corps est affectée de deux sortes d'erreurs, l'une qui provient de l'imprécision du facteur de réduction et qu'on peut considérer comme systématique, et l'autre, à caractère aléatoire, qui est liée à l'irrégularité des désintégrations. C'est de cette dernière erreur qu'il sera question ici.

Comme dans un corps homogène la probabilité de désintégration d'un atome, qui est la même pour tous les atomes, est très faible, on peut prévoir que le nombre de particules enregistrées en provenance du corps radioactif dans un intervalle de temps donné sera régi par une loi de Poisson. De plus, le bruit de fond possédant des propriétés aléatoires identiques, il en résulte que le comptage brut (radioactivité du corps augmenté du bruit de fond) sera lui aussi régi par une loi de Poisson, en vertu du principe d'additivité des variables obéissant à une telle loi (cf [1], p. 724).

Cela étant, si x_0 est le comptage brut obtenu au cours d'un intervalle de temps t_0 donné et si p_{x_0} est la probabilité d'obtenir dans cet intervalle de temps ce comptage x_0 , on a :

$$p_{x_0} = \frac{\xi_0^{x_0} e^{-\xi_0}}{\Gamma(x_0 + 1)}, \quad (1)$$

sachant que ξ_0 est l'espérance mathématique de x_0 , c'est-à-dire que :

$$E(x_0) = \sum_{x_0=0}^{\infty} x_0 p_{x_0} = \xi_0. \quad (2)$$

En d'autres termes, le paramètre ξ_0 n'est autre que la valeur moyenne vers laquelle on se rapprocherait de plus en plus si l'on pouvait répéter indéfiniment le comptage dans des intervalles de temps tous égaux à t_0 .

Dans ces conditions, si $\gamma_0 = \xi_0/t_0$ est l'activité décelée au détecteur et si, en particulier, $\gamma_1 = \xi_1/t_1$ et $\gamma_2 = \xi_2/t_2$ sont respectivement l'activité du bruit de fond et celle du corps radioactif associé au bruit de fond, les problèmes qui se posent sont ceux de l'estimation et de la précision des activités γ_0 , γ_1 et γ_2 ainsi que de celle de l'activité pure γ du corps définie par la relation :

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad (3)$$

en supposant que l'erreur commise sur t_0 , t_1 et t_2 ne doive pas être prise en considération.

3. De l'estimation des activités brutes.

En vertu de la définition de l'activité γ_0 , ce problème se ramène à l'estimation du paramètre ξ_0 de la loi de Poisson correspondante et la solution la plus simple consiste à noter que l'équation de vraisemblance :

$$\frac{\partial \log p_{x_0}}{\partial \xi_0} = 0, \quad (4)$$

conduit ici à l'estimateur $\hat{\xi}_0 = x_0$ pour lequel on a évidemment :

$$E(\hat{\xi}_0) = \xi_0 \quad \text{et} \quad \text{var } \hat{\xi}_0 = \xi_0.$$

Il en résulte qu'en vertu des propriétés asymptotiques de la loi de Poisson, lorsque ξ_0 est suffisamment grand, on peut construire pour ξ_0 l'intervalle de confiance $(\underline{\xi}_0, \overline{\xi}_0)$ pour le coefficient $P = 1 - 2\alpha > 0$, avec :

$$\underline{\xi}_0 = x_0 - t_\alpha \sqrt{x_0} \quad \text{et} \quad \overline{\xi}_0 = x_0 + t_\alpha \sqrt{x_0}, \quad (5)$$

sachant que t_α est la valeur de la variable normale réduite t pour laquelle on a $\alpha = \text{Prob}(t \geq t_\alpha)$.

En particulier, pour $t_\alpha = 1, 2, 3$, on trouve les coefficients $P_1 = 0,6827$, $P_2 = 0,9545$ et $P_3 = 0,9973$, tandis que pour $P = 0,95$ et $P = 0,998$, on a : $t_\alpha = 1,96$ et $t_\alpha = 3,090$.

Par contre, lorsque ξ_0 n'est pas très grand, il convient de faire appel aux valeurs correctes des limites fiduciaires $\underline{\xi}_0$ et $\overline{\xi}_0$, qui s'expriment au moyen de la variable χ^2 (cf [1], p. 722) suivant :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_0 &= \frac{1}{2} \chi_a^2, & \text{pour } \nu = 2x_0 \text{ degrés de liberté,} \\ \text{et } \overline{\xi}_0 &= \frac{1}{2} \chi_{1-a}^2, & \text{pour } \nu = 2(x_0 + 1) \text{ degrés de liberté,} \end{aligned} \quad (6)$$

avec $\alpha = \int_0^{\chi_a^2} f(\chi^2) d\chi^2$, où $f(\chi^2)$ désigne la densité de probabilité de χ^2 , ce qui permet aussi d'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_0 &= u_\alpha \sqrt{x_0}, & \text{avec } I(u_\alpha, x_0 - 1) &= \alpha \\ \overline{\xi}_0 &= u_{1-\alpha} \sqrt{x_0 + 1}, & \text{avec } I(u_{1-\alpha}, x_0) &= 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

en utilisant la fonction gamma-incomplète :

$$I(u, p) = \int_0^{u\sqrt{p+1}} \frac{v^p e^{-v}}{\Gamma(p+1)} dv. \quad (8)$$

Il s'ensuit que pour $x_0 < 49$ et des valeurs particulières de α , on pourra se référer aux Tables de Hald (cf [3] pp. 40-43) et pour $x_0 < 50$ et toutes les valeurs de α , on pourra utiliser les tables de Pearson [4].

On peut en déduire également d'autres formules approchées pour ξ_0 et $\bar{\xi}_0$. En effet, si on note que la variable $v = u\sqrt{p+1}$ dans la distribution gamma-incomplète se confond asymptotiquement avec une variable normale de moyenne et de variance égales à $(p+1)$, il en résulte qu'on a aussi :

$$\xi_0 = x_0 - t_\alpha \sqrt{x_0} \quad \text{et} \quad \bar{\xi}_0 = (x_0 + 1) + t_\alpha \sqrt{x_0 + 1}. \quad (9)$$

Enfin, si l'on considère avec Hald (cf [1] p. 258) la formule approchée de χ^2 donnée par Wilson et Hilferty [5], il convient de retenir encore les formules :

$$\xi_0 = x_0 \left(1 - \frac{1}{9x_0} - \frac{t_\alpha}{3} \sqrt{\frac{1}{x_0}} \right)^3$$

et

$$\bar{\xi}_0 = (x_0 + 1) \left(1 - \frac{1}{9(x_0 + 1)} + \frac{t_\alpha}{3} \sqrt{\frac{1}{x_0 + 1}} \right)^3. \quad (10)$$

Comme dans la pratique on pourra, pour des raisons de simplicité, préférer l'emploi de l'une des formules approchées (5), (9) ou (10) à celui des relations exactes (6) ou (7), il est utile de connaître l'importance de l'erreur que l'on accepte de cette manière. A cet effet nous avons calculé à l'aide des tables de la fonction gamma-incomplète les coefficients P attachés aux intervalles de confiance obtenus en faisant dans ces formules $t_\alpha = 1, 2, 3$ afin de pouvoir les comparer avec les coefficients P_i ($i = 1, 2, 3$) attendus, et ce pour la valeur relativement faible $x_0 = 30$.

Les valeurs ainsi obtenues (tableau I) montrent que la formule (5) donne les résultats les moins bons, tandis que les formules (9) et (10) fournissent des valeurs de P très voisines des coefficients P_i correspondants, les dernières valeurs s'en approchant le mieux. Il convient d'ajouter que les nombres ξ_0 et $\bar{\xi}_0$ déduits de la dernière formule se confondent pratiquement avec les valeurs exactes tandis que ceux calculés à partir des formules (5) et

TABLEAU I

Coefficients P associés aux intervalles de confiance (5), (9) et (10)
pour $x_0 = 30$ et $t_a = 1, 2, 3$

$i = t_a$	1	2	3
P_i	.6827	.9545	.9973
Intervalle (5)	.6380	.9414	.9931
Intervalle (9)	.6848	.9561	.9958
Intervalle (10)	.6816	.9543	.9973

(9) sont systématiquement trop faibles. Il s'ensuit qu'un test de signification basé sur ces dernières formules serait biaisé puisqu'il favoriserait les faibles valeurs au détriment des valeurs élevées.

Il est cependant facile d'éviter cet inconvénient.

Pour la formule (5), il est clair, en effet, que la cause principale du biais provient de ce que dans l'expression qui donne $\bar{\xi}_0$, on trouve x_0 au lieu de $(x_0 + 1)$; pour l'éliminer il suffit donc d'augmenter $\bar{\xi}_0$ d'une unité.

Pour la formule (9), on notera que si on pose $\varepsilon = \sqrt{1/x_0}$ et si l'on écrit t pour t_a , la fonction de Wilson et Hilferty devient :

$$f(\varepsilon) = x_0 \left(1 + \frac{t\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{9} \right)^3,$$

ce qui, en développant et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3, conduit à :

$$f(\varepsilon) = x_0 \left(1 + t\varepsilon + \frac{t^2 - 1}{3} \varepsilon^2 \right) = x_0 (1 + t\varepsilon) + \frac{t^2 - 1}{3}, \quad (11)$$

c'est-à-dire, qu'en première approximation l'écart entre les valeurs données par les formules (9) et (10) est constant et égal à $(t^2 - 1)/3$.

En particulier, pour $t = 1, 2, 3$, la correction à appliquer aux formules (9) est respectivement égale à 0, 1 et 2,7. On voit donc que moyennant les remarques qui viennent d'être faites, l'approximation normale est parfaitement utilisable, même pour de faibles valeurs de x_0 .

4. De l'estimation des activités pures.

Si x_1 et x_2 sont les résultats des comptages donnés par le bruit de fond et par le corps radioactif associé au bruit de fond pendant les durées respectives t_1 et t_2 , les estimations des activités γ_1 et γ_2 correspondantes seront :

$$\hat{\gamma}_1 = C_1 = x_1 / t_1 \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_2 = C_2 = x_2 / t_2,$$

tandis que l'estimation de l'activité pure γ du corps radioactif sera donnée par la relation :

$$\hat{\gamma} = C = C_2 - C_1.$$

Il s'ensuit que, les variables x_1 et x_2 étant indépendantes et les durées t_1 et t_2 , supposées connues sans erreur, on a :

$$\text{var } C = \text{var } C_2 + \text{var } C_1 = \frac{\text{var } x_2}{t_2^2} + \frac{\text{var } x_1}{t_1^2}.$$

Comme on a d'autre part :

$$E(x_1) = \text{var } x_1 = \xi_1, \quad E(x_2) = \text{var } x_2 = \xi_2,$$

$$\gamma_1 = \xi_1 / t_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \xi_2 / t_2,$$

il vient :

$$\text{var } C = \frac{\xi_1}{t_1^2} + \frac{\xi_2}{t_2^2} = \frac{\gamma_1}{t_1} + \frac{\gamma_2}{t_2}, \quad (12)$$

ce qui conduit à :

$$\hat{\text{var}} C = \frac{C_1}{t_1} + \frac{C_2}{t_2}, \quad (13)$$

en même temps que :

$$\text{var } \hat{\text{var}} C = \frac{\xi_1}{t_1^4} + \frac{\xi_2}{t_2^4} = \frac{\gamma_1}{t_1^3} + \frac{\gamma_2}{t_2^3}. \quad (14)$$

On en déduit immédiatement que les estimations $\hat{\gamma}$ et $\hat{\text{var}} C$ deviennent très rapidement meilleures avec des durées t_1 et t_2 plus longues et qu'en outre, si l'on fixe t_2 et si γ_1 est petit par rapport à γ_2 , des valeurs de plus en plus grandes de t_1 n'apporteront que des réductions négligeables de $\text{var } C$ dès que γ_1 / t_1 est suffisamment petit en regard de γ_2 / t_2 . On voit donc qu'il peut y avoir avantage à déterminer un choix optimal des durées t_1 et t_2 de mesure.

Cela étant, montrons que si on pose $T = t_1 + t_2$, les valeurs de t_1 et de t_2 qui rendent T minimale pour une valeur de $\text{var } C$ donnée ou qui rendent $\text{var } C$ minimale pour une valeur de T donnée, obéissent à la même relation.

En effet, si l'on écrit :

$$f(t_1, T) = \frac{\gamma_1}{t_1} + \frac{\gamma_2}{T - t_1}, \quad (15)$$

la réponse à la deuxième question est donnée par l'équation (cf [6] p. 302) :

$$\frac{df}{dt_1} = -\frac{\gamma_1}{t_1^2} + \frac{\gamma_2}{(T - t_1)^2} = 0, \quad (16)$$

qui donne :

$$t_2/t_1 = \sqrt{\gamma_2/\gamma_1} = \sqrt{R} > 1, \quad (17)$$

avec la condition :

$$\frac{d^2 f}{dt_1^2} = 2\gamma_1 t_1^{-3} + 2\gamma_2 t_2^{-3} > 0, \quad (18)$$

qui est effectivement vérifiée pour $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$.

Dans le premier cas, si k désigne une constante, on a :

$$f(t_1, T) = k, \quad (19)$$

et la propriété résulte de ce que les valeurs de

$$\frac{dT}{dt_1} \text{ et de } \left(\frac{d^2 T}{dt_1^2} \right) \frac{dT}{dt_1} = 0$$

que l'on déduit de l'équation (19) en calculant les dérivées totales par rapport à t_1 sont respectivement égales à

$$-\frac{df}{dt_1} \text{ et à } -\frac{d^2 f}{dt_1^2}$$

données par les relations (16) et (18) au facteur $-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^{-1}$ près.

5. Les abaques de comptage.

Il résulte de ce qui précède que si ξ_1 et ξ_2 sont suffisamment grands, l'erreur relative e_r de la mesure C de γ , au moyen de laquelle on s'exprime habituellement, sera distribuée normalement autour d'une moyenne nulle

avec un variance $v^2 = \frac{\text{var } C}{\gamma^2}$ qui, avec (3) et (17) peut encore s'écrire :

$$v^2 = \frac{1}{\xi_1 (R-1)^2} + \frac{R^2}{\xi_2 (R-1)^2}. \quad (20)$$

De plus, comme on a :

$$\xi_1 = \gamma_1 t_1 \quad \text{et} \quad \xi_2 = \gamma_2 t_2, \quad (21)$$

la condition d'optimalité (17) devient :

$$\xi_2 = \xi_1 R \sqrt{R}. \quad (22)$$

Il s'ensuit que si l'on veut que $|e_r|$ soit au plus égal à $V\%$, pour le coefficient $P = (1 - 2\alpha)$, il conviendra de choisir ξ_1 et ξ_2 de manière à avoir :

$$\frac{V}{100} = t_a v, \quad (23)$$

ce qui, avec les relations précédentes, entraîne :

$$\xi_1 = \left(\frac{100 t_a}{V}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2}$$

$$\text{et} \quad \xi_2 = \left(\frac{100 t_a}{V}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2} \cdot R \sqrt{R}. \quad (24)$$

On voit ainsi que pour une valeur de R donnée, les valeurs de ξ_1 et de ξ_2 sont fixées dès que le rapport t_a/V est connu.

De ce fait, l'abaque de détermination de ξ_1 et ξ_2 pourra fournir ces valeurs soit en fonction de R , t_a/V étant fixé, soit en fonction de V et de R , α étant fixé, soit encore en fonction de t_a et de R , V étant fixé.

6. L'abaque universel de G. Ballot.

Cet abaque comporte (fig. 1) une représentation graphique des fonctions $N_1 = \xi_1$ et $N_2 = \xi_2$ en fonction de R suivant les relations (24) où l'on a fait $V = 1$ et $\alpha = 0,001$ ($P = 0,998$), c'est-à-dire $t_a = 3,090$, N_1 et N_2 étant marqués en abscisse suivant une échelle logarithmique de 10^2 à 10^8 , et R , en ordonnée, d'après une échelle fonctionnelle choisie de telle manière que les valeurs de N_1 s'alignent sur une droite.

Pour la détermination de N'_1 et de N'_2 correspondant à $V' \neq 1$, R et t_a restant les mêmes, on note qu'on a :

$$N'_1 = \left(\frac{100 t_a}{V'}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2}$$

$$\text{et} \quad N'_2 = \left(\frac{100 t_a}{V'}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2} \cdot R \sqrt{R}, \quad (25)$$

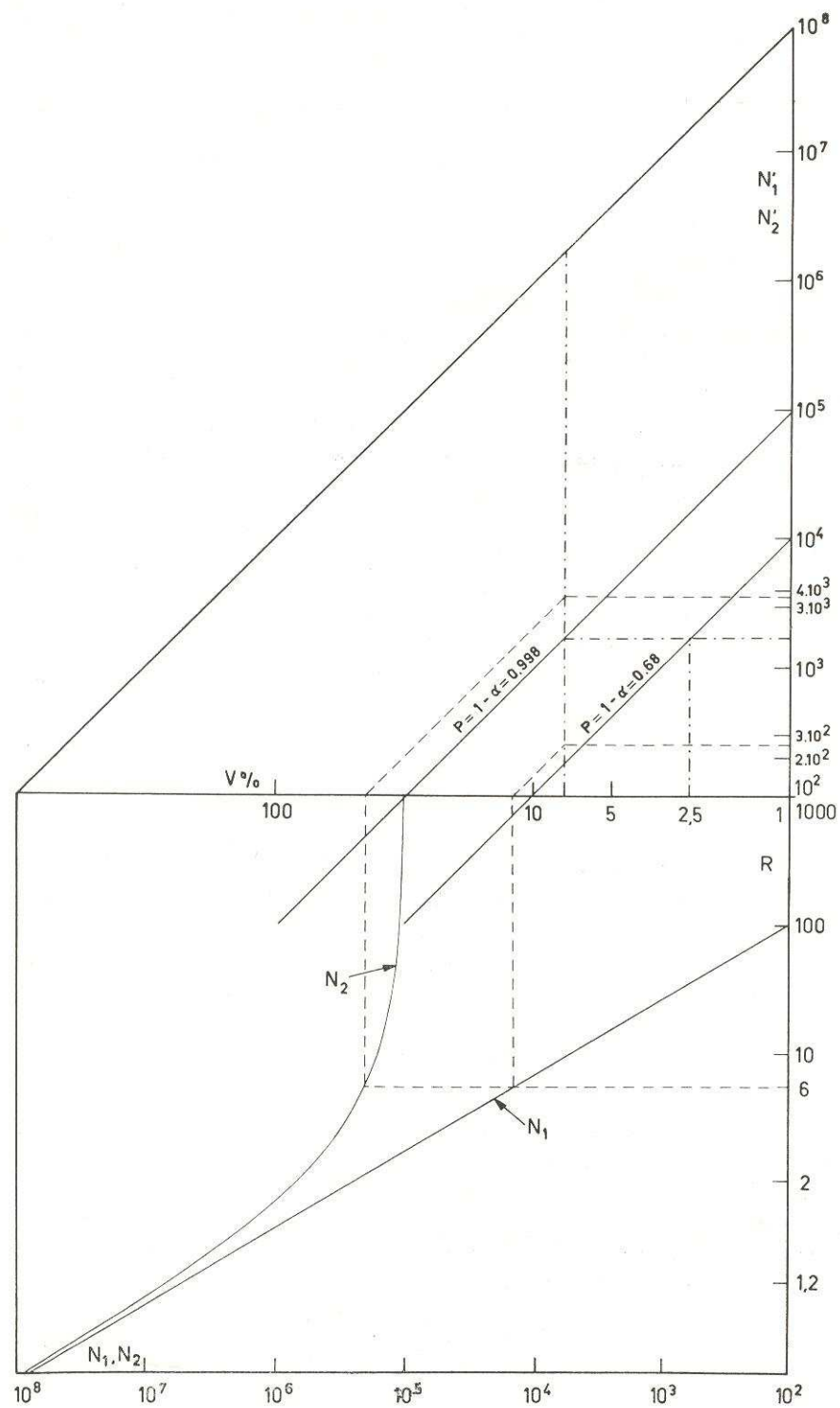


Fig. 1. — Abaque universel de G. Ballot.
Détermination de N'_i pour $R = 6$, $P' = 0,68$ et $V' = 2,5$.

d'où l'on déduit, avec (24) où l'on fait $V = 1$:

$$2 \log V' = -\log N'_i + \log N_i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (26)$$

Il apparaît ainsi que dans un système de coordonnées logarithmiques en V' et N'_i , la relation (26) définit un faisceau de droites parallèles, dans lequel chaque droite correspond à une valeur particulière de N_i .

Dans l'abaque de G. Ballot, ce faisceau de droites a été réalisé en marquant les valeurs de V en échelle logarithmique sur une parallèle aux abscisses du premier graphique de telle manière que $V = 100$ se confonde avec l'abscisse $N_i = 10^6$ et que pour $V = 1$ on retrouve les ordonnées $N'_i = N_i$.

D'autre part, comme la valeur de N'_i correspondant à $V = 100$ et $N_i = 10^6$ est $N'_i = 10^2$, et que les valeurs de N'_i ont été marquées à partir de cette valeur au moyen de la même échelle logarithmique que N_i sur le prolongement de l'axe des ordonnées R du graphique précédent, les droites d'équation (26) se présentent dans le nouveau graphique avec un coefficient angulaire de 45° .

Enfin pour le calcul de l'un des termes de la proportion :

$$\frac{t_{a'}}{V'} = \frac{t_a}{V}, \quad (27)$$

à partir des trois autres termes, on note que cette proportion entraîne la relation :

$$\log V - \log V' = \log t_a - \log t_{a'}, \quad (28)$$

ce qui a été mis à profit en marquant parmi les droites d'équation (26) celles qui coupent l'axe coordonné V aux valeurs $10 t_a$ pour $P = 1 - 2\alpha = 0,50, 0,68, 0,84, 0,90, 0,95, 0,98, 0,998$.

Cela étant, pour le calcul des nombres optimaux N'_1 et N'_2 correspondant au rapport R et aux conditions P' et V' , on procède comme suit (cf. fig. 1) :

1°) on détermine la valeur de V correspondant à $P = 0,998$ en lisant sur la droite ($P = 0,998$) l'abscisse V du point de même ordonnée que le point d'abscisse V' sur la droite (P').

2°) après avoir évalué N_i à l'aide du premier graphique, on obtient N'_i en lisant sur la droite (N_i) du second graphique l'ordonnée N'_i du point d'abscisse V .

7. Le nomogramme de C. Levert.

En faisant $t_a = 1$ et en posant :

$$\frac{\delta_i}{100} = \frac{1}{R-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \quad (29_1)$$

