

Sur le calcul des investissements avec quelques applications à la gestion industrielle

par L. SKENAZI,
Charbonnages de Beringen.

Notre propos dans les lignes qui vont suivre est d'aborder successivement trois sujets :

- 1°) le calcul de la valeur d'un investissement
- 2°) son choix
- 3°) son amortissement.

Sans vouloir, un instant, croire avoir fait le tour complet de ces problèmes, nous proposerons plutôt au lecteur une méthode de calcul simple.

I. — LA FORMULE DE CAPITALISATION

Partons tout d'abord de la relation bien connue $C = c (1 + i)^n$ où c représente le capital initial, i le taux d'intérêt par unité de temps et n le nombre de ces unités de temps. Cette formule fixe la cadence de la capitalisation qui pourra, suivant le cas, être l'année, le semestre ou le mois par exemple. En subdivisant à l'infini l'unité de temps, nous réaliserons une capitalisation continue et instantanée. Le multiplicateur $(1 + i)^n$ deviendra par passage à la

limite et pour une valeur constante de i : $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (1 + \frac{i}{\tau})^{n\tau} = e^{in}$ puisque la

base des logarithmiques népériens $e = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1 + \frac{i}{\tau})^{\tau/i}$.

Dans la relation e^{in} , les deux exposants constituent un produit sans dimension; n pourra s'exprimer en années si i représente le taux d'intérêt annuel supposé invariant.

La formule de capitalisation instantanée deviendra donc :

$$C = ce^{in} \quad (1)$$

Cette relation représente la limite maximum pouvant être atteinte par la capitalisation puisque le temps intervient ici de façon continue dans le processus cumulatif d'intérêts.

Extension de la formule de capitalisation pour un taux d'intérêt variable dans le temps.

Soit $i(t)$ cette fonction; en découpant le temps de capitalisation en intervalles $dt_1, dt_2 \dots dt_n$ suffisamment petits pour considérer $i(t)$ constant à l'intérieur de chaque intervalle, nous aurons après dt_1 , le coefficient de capitalisation $e^{i_1 dt_1}$, après dt_2 : $e^{i_1 dt_1} \times e^{i_2 dt_2} = e^{i_1 dt_1 + i_2 dt_2}$ et après n intervalles :

$$e^{\sum_{k=1}^n i_k(t) dt_k}$$

Par passage à la limite pour des intervalles dt de plus en plus petits, la formule se mettra sous la forme la plus générale :

$$C = c e^{\int_0^n i(t) dt}$$

Cette relation englobe la formule (1) $C = c e^{in}$ cas particulier pour lequel $i(t) = i = \text{constante}$.

Moyennant une correction à la valeur du taux d'intérêt i , de pratique courante, la formule (1) peut s'employer quel que soit le rythme de capitalisation choisi.

En effet si celui-ci est annuel, il suffira de résoudre l'équation $e^\gamma = 1 + i$ où i est le taux d'intérêt annuel pour déterminer γ à introduire dans la fonction exponentielle $e^{\gamma n}$. Notons que γ sera nécessairement plus petit que i . Ainsi pour $i = 5\%$ annuel, $\gamma = \ln 1,05$ soit $\gamma = 0,0488$.

Il est très aisé d'établir une table de correspondance entre le taux d'intérêt annuel et le taux instantané pour obtenir, par l'emploi de la formule (1) la valeur d'une capitalisation discontinue.

Table de correspondance pour taux annuels.

taux annuel	taux instantané	taux annuel	taux instantané
3 %	2,95 %	20 %	18,23 %
4 %	3,92 %	25 %	22,31 %
5 %	4,88 %	30 %	26,23 %
6 %	5,83 %	40 %	33,65 %
10 %	9,53 %	50 %	40,55 %

Si par exemple nous voulons capitaliser par semestre sur la base d'un taux annuel de 6 %, la formule (1) deviendra : $C = c e^{0,0295 n}$ où n est la durée exprimée en semestres et 0,0295 le correspondant du taux $3 \% = 6/2$.

Signification de la capitalisation instantanée.

1. Elle représente, comme nous l'avons dit précédemment, la limite supérieure pouvant être atteinte par la subdivision à l'extrême de l'unité de temps. Le tableau ci dessus montre que les écarts sont faibles pour les taux pratiqués couramment.

2. L'introduction d'une fonction continue apporte une simplification aux développements mathématiques et permet l'emploi de procédés usuels issus de l'analyse infinitésimale, ainsi que nous le verrons plus loin.

3. La capitalisation instantanée entraîne, avec elle, la notion du temps continu. Si ceci ne semble pas d'une grande utilité pour le calcul d'intérêts composés, il peut en être différemment lorsqu'il s'agit de chiffrer, par exemple, un phénomène de dépréciation continue. La perte de valeur d'un investissement se poursuit de façon constante et cumulative dans le temps et ne doit pas être tronçonnée de façon arbitraire en intervalles égaux.

De même, l'actualisation d'un revenu, du produit d'une fabrication doit être vue dans la même optique du temps continu.

II. — CALCUL D'UN INVESTISSEMENT

Si nous appelons I , la somme algébrique des différentes dépenses engagées par et pour un nouvel investissement, sa valeur réelle dépendra de la durée totale de sa réalisation jusqu'à sa mise en route; toute dépense effectuée à un moment donné étant débitrice d'intérêts mesurant le manque à gagner aussi longtemps que l'investissement n'est pas productif.

Il serait intéressant de faire varier le facteur durée et vitesse d'exécution de façon à montrer leurs incidences sur le coût réel de l'investissement.

A. Influence de la vitesse.

Nous passerons trois cas en revue pour une même investissement :

- 1°) réalisation en un temps T à vitesse constante
- 2°) réalisation en un temps T à vitesse linéairement croissante
- 3°) réalisation en un temps T à vitesse linéairement décroissante

L'origine des temps est chaque fois prise au moment du démarrage des travaux.

1^{re} cas : Réalisation en un temps T à vitesse constante (fig. 1).

I représente la totalité de la surface hachurée.

La dépense pendant le temps dt sera $\frac{I}{T} dt$.

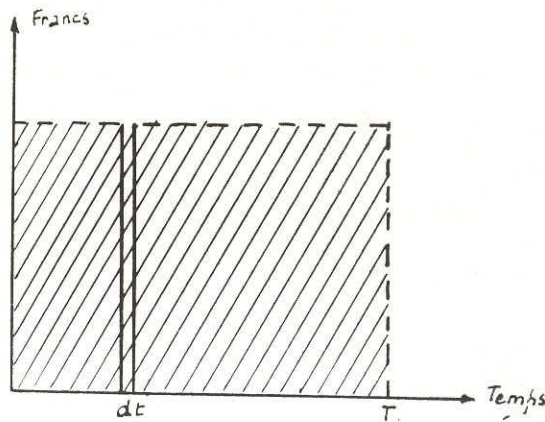


Fig. 1.

Le coût réel de l'investissement I sera :

$$I_1^* = \int_0^T \frac{I}{T} e^{i(T-t)} dt = \frac{I}{iT} (e^{iT} - 1)$$

Si nous développons l'exponentielle en série de Mac Laurin, il vient :

$$e^{iT} = 1 + \frac{iT}{1} + \frac{i^2 T^2}{2!} + \frac{i^3 T^3}{3!} + \frac{i^4 T^4}{4!} + \dots$$

ce qui nous donne :

$$I_1^* = \frac{I}{iT} \left(iT + \frac{i^2 T^2}{2} + \frac{i^3 T^3}{6} + \dots \right) = I \left(1 + \frac{iT}{2} + \frac{i^2 T^2}{6} + \dots \right) \quad (3)$$

2^e cas : Réalisation en un temps T à vitesse croissante linéaire (fig. 2).

La loi des dépenses est $I_t = a t$ avec

$$I = \int_0^T a t dt = \frac{a T^2}{2} \text{ d'où } a = \frac{2 I}{T^2}.$$

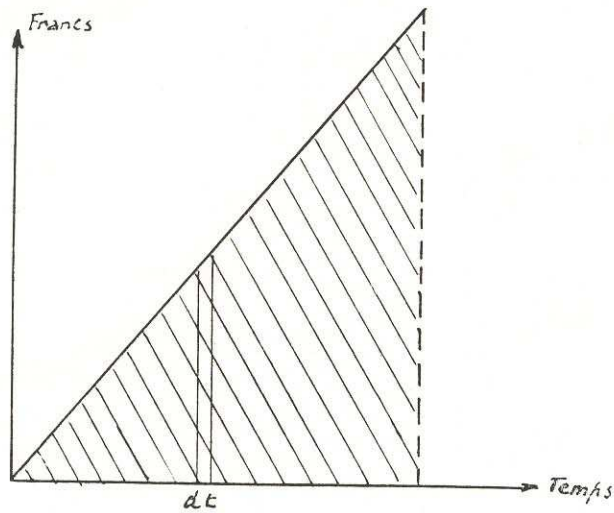


Fig. 2.

Coût réel de l'investissement :

$$I_2^* = \int_0^T \frac{2I}{T^2} t e^{i(T-t)} dt = \frac{2I}{i^2 T^2} (e^{iT} - iT - 1) \quad (4)$$

En utilisant la formule de Mac Laurin, nous obtenons :

$$I_2^* = \frac{2I}{i^2 T^2} \left(\frac{i^2 T^2}{2} + \frac{i^3 T^3}{6} + \frac{i^4 T^4}{24} + \dots \right)$$

c'est-à-dire :

$$I_2^* = I \left(1 + \frac{iT}{3} + \frac{i^2 T^2}{12} + \dots \right) \quad (5)$$

3^e cas : Réalisation en un temps T à vitesse linéairement décroissante (fig. 3).

La loi des dépenses est du type $I_t = a + bt$ avec pour déterminer les paramètres a et b , les deux relations

$$a + bT = 0$$

$$\text{et } I = \int_0^T (a + bt) dt$$

ou encore :

$$a = -bT$$

$$I = aT + \frac{1}{2} bT^2$$

d'où on tire $a = \frac{2I}{T}$ et $b = -\frac{2I}{T^2}$

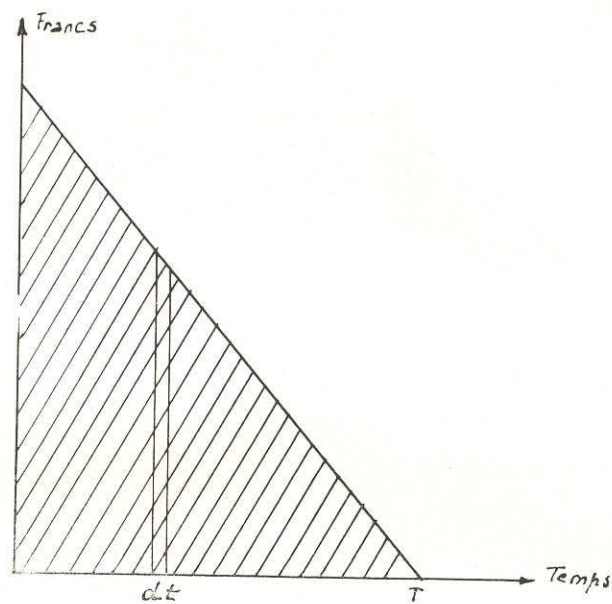


Fig. 3.

Dans ce cas, la loi des dépenses deviendra :

$$I_t = \frac{2I}{T} - \frac{2I}{T^2}t = \frac{2I}{T^2}(T - t)$$

Coût réel de l'investissement :

$$I_3^* = \frac{2I}{T^2} \int_0^T (T - t) e^{i(T-t)} dt$$

$$= \frac{2I}{iT} \left[e^{iT} - \frac{1}{iT} (e^{iT} - 1) \right] \quad (6)$$

Le développement en série de Mac Laurin, nous donne l'approximation :

$$I_3^* = I \left(1 + \frac{2}{3} iT + \frac{1}{4} i^2 T^2 + \dots \right) \quad (7)$$

Nous avons donc les éléments pour comparer le coût réel d'un même investissement réalisé dans le même temps T à une vitesse constante (I_1^*), croissante linéaire (I_2^*) et décroissante linéaire (I_3^*).

Nous constatons ⁽¹⁾ que $I_2^* < I_1^* < I_3^*$.

Que valent les écarts?

$$\begin{aligned} I_3^* - I_1^* &= I(1 + 2/3 iT + 1/4 i^2 T^2 + \dots) - I(1 + \frac{iT}{2} + \frac{i^2 T^2}{6} + \dots) \\ &= I[iT(2/3 - 1/2) + i^2 T^2(1/4 - 1/6)] \\ &= \frac{I \cdot iT}{6} (1 + \frac{iT}{2}). \end{aligned}$$

A titre d'exemple prenons $i = 5\%$ et $T = 4$ ans, soit $iT = 0,2$

$$I_3^* - I_1^* = \frac{I \times 0,2}{6} (1 + \frac{0,2}{2}) = 0,037 I$$

$$\text{De même } I_1^* - I_2^* = \frac{I iT}{6} (1 + \frac{iT}{2}).$$

La mise en route *progressive* des travaux est donc la méthode la moins coûteuse, comparée aux variantes envisagées et pour un temps d'exécution T donné.

B. Influence de la durée d'exécution.

Les trois fonctions I_1^* , I_2^* et I_3^* sont croissantes par rapports au temps. Pour déterminer celle qui est la plus sensible à un allongement de la durée des travaux, il suffira de comparer entre elles, leurs dérivées premières par rapport à t .

1°) Réalisation à vitesse constante :

$$I_1^* = I(1 + \frac{it}{2} + \frac{i^2 t^2}{6} + \dots)$$

$$\text{sa dérivée } \frac{dI_1^*}{dt} = I(\frac{1}{2}i + \frac{i^2 t}{3} + \dots) = \frac{Ii}{6}(3 + 2it + \dots)$$

(1) On démontre sans peine que ces relations sont correctes quelle que soit l'approximation adoptée.

2°) Réalisation à vitesse croissante linéaire :

$$I_2^* = I \left(1 + \frac{it}{3} + \frac{i^2 t^2}{12} + \dots \right)$$

sa dérivée $\frac{dI_2^*}{dt} = I \left(\frac{1}{3}i + \frac{1}{6}i^2 t + \dots \right) = \frac{Ii}{6} (2 + it + \dots)$

3°) Réalisation à vitesse décroissante linéaire :

$$I_3^* = I \left(1 + \frac{2}{3}it + \frac{1}{4}i^2 t^2 \dots \right)$$

sa dérivée $\frac{dI_3^*}{dt} = I \left(\frac{2}{3}i + \frac{1}{2}i^2 t \right) = \frac{Ii}{6} (4 + 3it + \dots)$

Nous pouvons conclure que le facteur temps est moins sensible dans le second cas et que l'exécution à vitesse linéaire décroissante est la plus influencée par un allongement du temps T .

Pour chiffrer l'influence de la durée dans la réalisation d'un programme d'investissements, nous comparerons un même travail effectué soit en 4 ans, soit en 6 ans; le taux d'intérêt restant fixé à 5%. iT' vaudra respectivement 0,2 et 0,3.

a) Réalisation à vitesse constante :

$$\frac{I_{6 \text{ ans}}^*}{I_{4 \text{ ans}}^*} = \frac{1 + \frac{0,3}{2} + \frac{0,09}{6}}{1 + \frac{0,2}{2} + \frac{0,04}{6}} = 1,05$$

b) Réalisation à vitesse croissante linéaire :

$$\frac{I_{6 \text{ ans}}^*}{I_{4 \text{ ans}}^*} = \frac{1 + \frac{0,3}{3} + \frac{0,09}{12}}{1 + \frac{0,2}{3} + \frac{0,04}{12}} = 1,03$$

c) Réalisation à vitesse décroissante linéaire :

$$\frac{I_{6 \text{ ans}}^*}{I_{4 \text{ ans}}^*} = \frac{1 + \frac{2}{3} \times 0,3 + \frac{0,09}{4}}{1 + \frac{2}{3} \times 0,2 + \frac{0,04}{4}} = 1,07$$

Le processus de calcul suivi au cours des exemples développés dans ce chapitre peut facilement s'étendre à l'évaluation du coût supplémentaire entraîné par un ralentissement ou un arrêt temporaire des travaux.

III. — CHOIX D'UN INVESTISSEMENT

Il convient tout d'abord de préciser sous quel angle nous aborderons ce problème. Celui-ci est extrêmement vaste et peut s'étaler depuis la motivation d'investir (pourquoi investir?) jusqu'au choix entre deux machines à acquérir dont le prix et les caractéristiques sont différents mais reçoivent le même but poursuivi par l'investisseur.

C'est ce dernier aspect qui retiendra notre attention ici. Nous laisserons de côté les questions se rapportant à la politique générale de l'entreprise à savoir si le but poursuivi par le nouvel investissement est de diversifier un programme de fabrication, ou de développer un volume de production déjà existant ou encore de réaliser un investissement de défense.

Nous nous limiterons donc au choix entre deux (ou plusieurs) équipements ayant des capacités de production voisines, des coûts et des durées de vie différents et nous supposerons disposer d'un marché suffisamment extensible pour absorber la nouvelle production sans modification des prix. Ces restrictions sont introduites dans un but de simplification dans le développement qui va suivre et nous permettent, ici, d'éliminer l'incidence des problèmes commerciaux tels que l'influence sur le niveau des prix due à l'apparition de quantités supplémentaires produites.

Méthode de base : ce sera l'actualisation des profits futurs prévisibles ramenés au jour de la mise en route du nouveau matériel.

Formule d'actualisation : si i est le loyer de l'argent, taux d'intérêt supposé constant, la valeur de 1 F après t années sera e^{it} (formule 1). Par conséquent, la valeur « actuelle » d'un profit de 1 F réalisé en t années sera e^{-it} .

Soit une machine M_1 dont le coût calculé comme indiqué au chapitre précédent a été trouvé égal à I_1^* et dont la durée de vie est t_1 .

Le bénéfice brut total G_1 peut être connu : ce sera la différence entre prix de vente et prix de revient d'une pièce multiplié par le nombre total de pièces produites pendant la durée t_1 de vie de la machine M_1 . Le gain par

unité de temps sera $\frac{G_1}{t_1}$.

En prenant pour origine des temps, le moment de mise en marche de la machine l'actualisation du bénéfice brut sera, (cf. fig. 4)

$$\int_0^{t_1} \frac{G_1}{t_1} e^{-it} dt.$$

et comme par hypothèse $\frac{G_1}{t_1}$ est constant, il viendra

$$\frac{G_1}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-it} dt = \frac{G_1}{it_1} (1 - e^{-it_1})$$

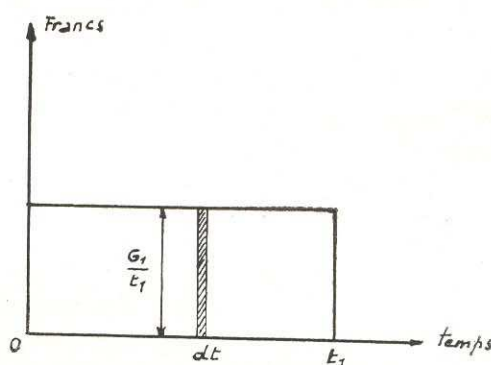


Fig. 4.

Taux de rentabilité : Par définition, le taux de rentabilité r est un taux fictif tel que :

$$I_1^* = \int_0^{t_1} \frac{G_1}{t_1} e^{-rt} dt = \frac{G_1}{rt_1} (1 - \frac{1}{e^{rt_1}}) \quad (8)$$

I_1^* devra éventuellement être corrigé par la valeur actualisée au temps $t = 0$ de la valeur de revente de l'équipement M_1 à l'instant $t = t_1$.

Le taux de rentabilité est donc un taux d'intérêt fictif permettant d'égaliser l'actualisation des profits futurs réalisables pendant la durée de vie d'un investissement, à sa valeur au moment de la mise en service.

Le taux de rentabilité est parfois utilisé comme critère de comparaison entre deux investissements I_1^* et I_2^* .

C'est là un usage abusif, en effet l'équation (8) dont la solution peut être obtenue par approximations successives, comprend d'autres paramètres qui interviennent également tels que G et t . Une comparaison basée uniquement sur une confrontation entre r_1 et r_2 ne pourra servir de base à un choix

entre I_1^* et I_2^* qu'après s'être assuré que G_1 et G_2 d'une part, t_1 et t_2 d'autre part ont des valeurs suffisamment voisines.

Si la résolution de l'équation (8) fait apparaître une valeur de r supérieure à i , l'investissement sera rentable, en lui-même. Par contre si $r \leq i$, la décision d'investir ne doit pas être exclue, à priori, et le problème pourra être posé dans un cadre économique élargi.

Le vrai choix entre plusieurs équipements est celui qui rend maximum la différence entre le gain brut actualisé et la valeur de l'investissement, c'est-à-dire :

$$\int_0^{t_1} \frac{G_1}{t_1} e^{-it} dt - I_1^* = \frac{G_1}{it_1} \left(1 - \frac{1}{e^{it_1}}\right) - I_1^* \quad (9)$$

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons pris comme modèle, le cas d'un prix de revient constant entraînant l'existence d'une marge brute constante dans le temps. Une telle hypothèse simplifie le développement mathématique. Ce cas peut cependant se rencontrer dans la réalité.

1°) s'il s'agit d'un équipement se démodant rapidement avant usure sensible.

2°) certaines machines-outils ont des frais d'entretien ou de consommation unitaire d'énergie fluctuant peu en fonction du temps d'utilisation.

3°) dans l'hypothèse de salaires stables, ce serait le cas également, en approximation, d'industries où les produits fabriqués incorporent une haute proportion de main-d'œuvre.

Plus généralement, la réalité se rapproche du modèle à prix de revient croissant, l'usure du matériel pouvant donner à cette courbe une allure linéaire, par exemple (cf. fig. 5).

Dans l'hypothèse d'un prix de vente constant, la courbe des marges brutes sera $g_t = m + nt$ avec pour déterminer m et n , les relations

$$G = \int_0^{t_1} (m + nt) dt \text{ et } n + q = 0.$$

En reprenant la marche suivie dans l'exposé du modèle où g_t était constant, on déterminera le taux de rentabilité et le gain actualisé se rapportant à ce cas.

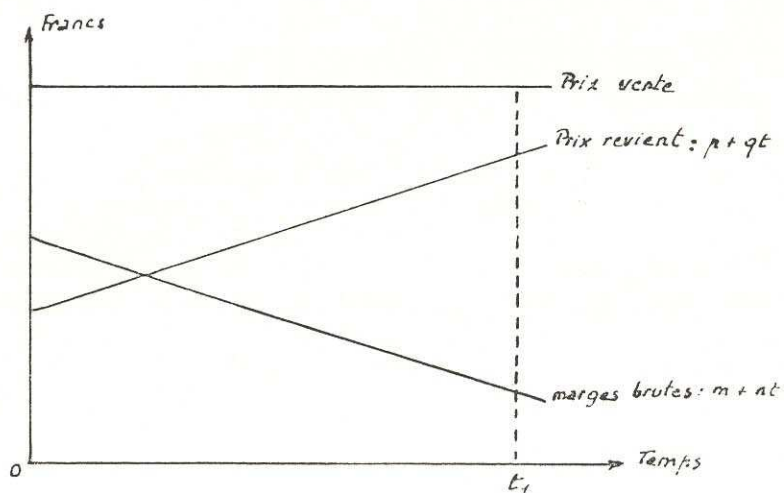


Fig. 5.

IV. — L'AMORTISSEMENT

Si un épargnant confie I francs à un compte productif d'intérêts, après t années, il possédera $I e^{it}$ francs se décomposant en I son capital initial et $I (e^{it} - 1)$ les intérêts composés. i est le loyer de l'argent, corrigé éventuellement pour tenir compte que la capitalisation bancaire est discontinue.

Si d'autre part, un entrepreneur dispose de la même quantité I disponible et qu'il l'utilise à acquérir un investissement, il bénéficiera pendant la durée de vie t_1 de son matériel d'une marge brute égale à

$$\int_0^{t_1} g(t) e^{i(t_1-t)} dt$$

où $g(t)$ représente la différence par unité de temps entre prix de vente et de revient.

A la différence avec l'épargnant qui garde intact son capital de départ, l'investissement initial aura, pour l'entrepreneur, perdu au temps t_1 sa valeur par dégradations successives.

Il convient donc, tout au long de l'existence du matériel, de se constituer une rente telle qu'à l'instant t_1 elle compense cette disparition de substance. Cette rente est l'amortissement.

Dans ce qui précède nous avons implicitement supposé que l'investissement avait été réalisé au sein de l'entreprise par auto-financement ; s'il n'en

était pas ainsi, il conviendrait de réduire la marge bénéficiaire brute de la valeur des intérêts obligatoires échelonnés dans le temps.

L'amortissement n'a pas non plus pour but de mettre, au moment de la mise hors service d'un matériel, à la disposition de l'entreprise, les moyens monétaires permettant d'acquiescer un investissement destiné à remplacer celui qui vient d'être déclassé. La chose devient évidente si nous prenons, à titre d'exemple, le cas d'un puits de pétrole : après épuisement du gisement, il ne servirait à rien de creuser au même endroit un nouveau forage et il n'est pas évident qu'il est possible d'en forer un autre ailleurs.

La dotation d'amortissement représente la différence entre la marge brute et le bénéfice net ou profit. Il est dès lors évident qu'il n'est pas possible d'en faire une étude complète sans tenir compte de son environnement fiscal. Nous accepterons pourtant cette simplification puisque le but est d'exposer une méthode de calcul.

Si $a(t)$ représente la valeur de l'amortissement par unité de temps et en fonction du temps, nous aurons par définition :

$$I = \int_0^{t_1} a(t) e^{-it} dt \quad \text{ou encore :} \quad I e^{it_1} = \int_0^{t_1} a(t) e^{i(t_1-t)} dt \quad (10)$$

suivant qu'on se place dans une optique d'actualisation ou non.

La valeur du bénéfice net total sera :

$$\int_0^{t_1} g(t) e^{i(t_1-t)} dt - \int_0^{t_1} a(t) e^{i(t_1-t)} dt$$

Si nous appelons respectivement k et K des coefficients de réduction dus à l'impôt et s'appliquant respectivement à la capitalisation et aux bénéfices industriels, l'entrepreneur aura réalisé un profit supérieur ou égal à l'épargnant si

$$k I e^{it_1} \leq K \left[\int_0^{t_1} g(t) e^{i(t_1-t)} dt - \int_0^{t_1} a(t) e^{i(t_1-t)} dt \right]$$

et si nous prenons, comme déjà fait précédemment $g(t) = \text{constante} = \frac{G_1}{t_1}$ il vient après intégration

$$(k + K) I e^{it_1} \leq K \int_0^{t_1} g(t) e^{i(t_1-t)} dt.$$

$$(k + K) I e^{it_1} \leq K \cdot \frac{G_1}{it_1} (e^{it_1} - 1)$$

ou encore :

$$G_1 \geq \frac{k + K}{K} \cdot \frac{e^{it_1}}{e^{it_1} - 1} \cdot I \cdot it_1. \quad (12)$$

Revenons au premier modèle caractérisé par un prix de revient constant et une marge brute également constante; t_1 étant la durée de vie de l'équipement.

Il semble, dans ce cas, tout à fait normal de prendre une dotation d'amortissement a constante par unité de temps.

La valeur de a se déduira de l'équation (10) :

$$I = a \int_0^{t_1} e^{-it} dt$$

$$I = \frac{a}{i} (1 - e^{-it_1})$$

d'où

$$a = \frac{I i e^{it_1}}{e^{it_1} - 1}$$

Le rectangle $ABCD$ mesurera le profit qu'a retiré l'entreprise de l'utilisation de l'investissement I (cf. fig. 6).

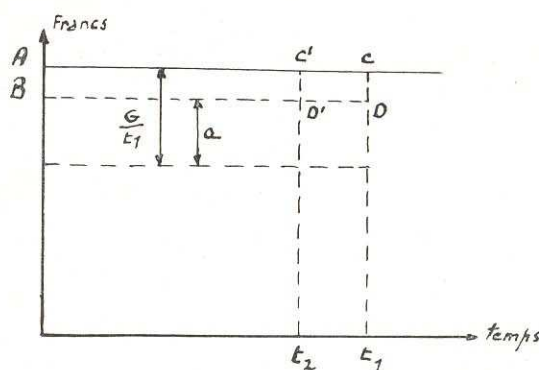


Fig. 6.

Si pour une raison extérieure ou erreur de prévision, la durée de vie était ramenée à t_2 ($t_2 < t_1$) il conviendrait de réduire le profit $ABC'D'$ de la quantité non amortie du matériel à savoir $a(t_1 - t_2)$. L'estimation du temps t_1 dont dépend essentiellement la valeur de la dotation a doit être faite dans le sens de la sécurité.

Prenons le cas du second modèle, avec prix de revient brut linéairement croissant et ajoutons y un amortissement constant (fig. 7).

L'amortissement devra s'étaler en un temps t_2 nécessairement plus petit que t_1 .

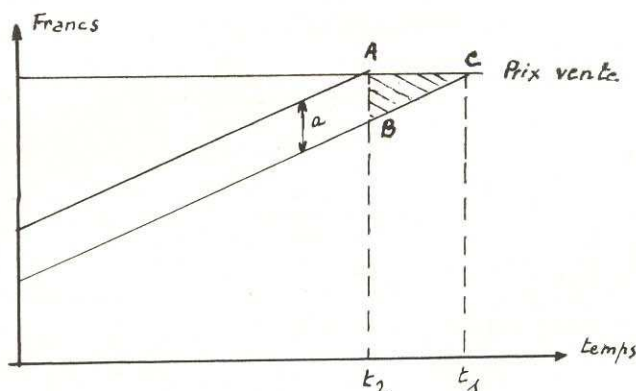


Fig. 7.

Le problème comportera deux inconnues a et t_2 et est parfaitement défini.

En effet la marge bénéficiaire brute par unité de temps $g(t)$ est de la forme $g(t) = m + nt$, avec

$$m + nt_2 - a = 0 \text{ et } I = \int_0^{t_2} a e^{-it} dt \quad (13)$$

Faudra-t-il cesser la fabrication en t_2 ? Pas nécessairement puisque l'exploitation entre t_2 et t_1 restera bénéficiaire. Le triangle ABC constitue notre sécurité. Celle-ci peut-être connue d'avance puisque la valeur de t_2 est mathématiquement définie dès qu'on s'est imposé un amortissement constant dans le temps.

La résolution du système de deux équations (13) peut s'obtenir en remarquant que :

$$I = (m + nt_2) (1 - e^{-it_2}) \cdot \frac{1}{i} \quad (14)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\log (I \times i) = \log (m + nt_2) + \log (1 - e^{-it_2}).$$

En utilisant des échelles logarithmiques, il est donc possible de construire un diagramme tel que soient exprimés en abscisses les temps (ici exprimés en

années), en ordonnées les valeurs des fonctions $1 - \frac{1}{e^{it}}$, $m + nt$ et $I \times i =$ constante. En combinant par addition les deux premières fonctions, nous trouvons une courbe dont l'intersection avec l'horizontale $I \times i$ détermine le temps t_2 pendant lequel doit s'étendre la durée de l'amortissement. La dotation constante a sera dès lors déterminée en résolvant l'équation (13)

$$I = a \int_0^{t_2} e^{-it} dt = \frac{a}{i} (1 - e^{-it_2})$$

où :

$$a = \frac{I \times i}{1 - e^{-it_2}}$$

Il est également possible d'envisager une loi d'amortissement variable dans le temps telle que le bénéfice net reste constant.

Supposons une loi des marges brutes linéairement décroissante $g(t) = m + nt$, la loi d'amortissement sera linéairement décroissante, de la forme $a(t) = \alpha + \beta t$. Si t_2 est la durée d'amortissement, nous aurons les relations suivantes :

$$\alpha + \beta t_2 = 0$$

$m + nt - (\alpha + \beta t) = c^{te}$ = pour exprimer le bénéfice net invariant.

$$I = \int_0^{t_2} (\alpha + \beta t) e^{-it} dt.$$

De la deuxième équation nous tirons $n - \beta = 0$ ou encore $n = \beta$.

De la première, $\alpha = -nt_2$; d'où la loi d'amortissement $a(t) = n(t - t_2)$. t_2 sera déterminé en résolvant :

$$I = \int_0^{t_2} n (t - t_2) e^{-it} dt = n \int_0^{t_2} t e^{-it} dt - nt_2 \int_0^{t_2} e^{-it} dt.$$

Après résolution, il vient

$$I = \frac{n}{i^2} (1 - i t_2 - e^{-it_2}) \quad (15)$$

La surface hachurée de la figure 8 représente la sécurité.

En observant que le développement en série de e^{-it} donne

$$e^{-it} = 1 - \frac{it}{1} + \frac{i^2 t^2}{2!} - \frac{i^3 t^3}{3!} + \dots,$$

la relation (15) peut avec approximation s'écrire

$$-\frac{I}{n} = \frac{t_2^2}{2} - \frac{it_2^3}{6} + \dots$$

d'où on déduira la valeur de t_2 et la loi d'amortissement $a(t) = n(t - t_2)$.

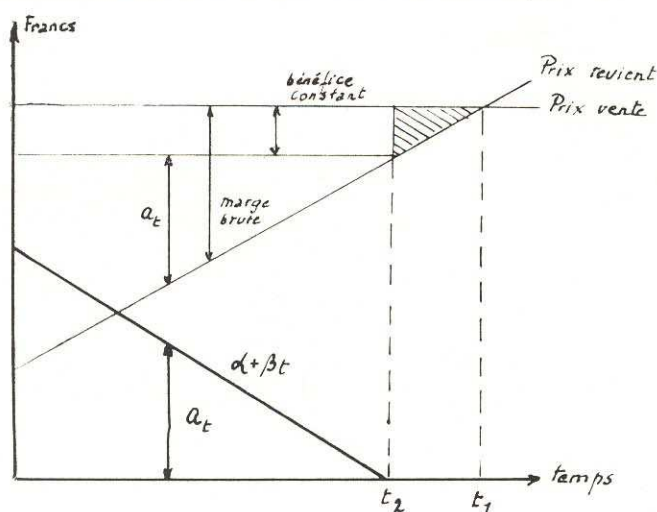


Fig. 8.

Les développements précédents appellent quelques remarques.

1°) L'amortissement calculé comme précédemment permet de calculer le seuil de rentabilité du prix de vente. En effet lorsque la marge bénéficiaire brute $g(t)$ est égale à l'amortissement au même instant, c.-à-d. lorsque $g(t) = a(t)$, nous avons assuré au capital investi I une rentabilité égale à celle qu'aurait apportée le marché des capitaux. Tout bénéfice supplémentaire provenant de l'inégalité $g(t) > a(t)$ est en réalité un « superbénéfice » au sens où l'entend le Professeur Allais de Paris.

2°) Les relations (14) et (15) permettent de fixer le temps d'amortissement t_2 ; pour que celui-ci ait un sens, il faut que $t_2 < t_1$ temps d'utilisation physique du matériel sans amortissement.

3°) L'amortissement par dotation constante issu de la formule (14) n'est pas toujours possible. La fonction $(m + nt)(1 - e^{-it})$ est en fait le produit d'une fonction croissante $1 - e^{-it}$ et d'une fonction décroissante $m + nt$ (car n est nécessairement négatif) et passe par un maximum.

Exemple de résolution graphique pour $I = 100.000 \text{ frs}$

$i = 5\%$

$$g(t) = m + nt = 55.000 - 5000t$$

$t_2 = 8 \text{ ans}$

$a = 15.000 \text{ frs}$

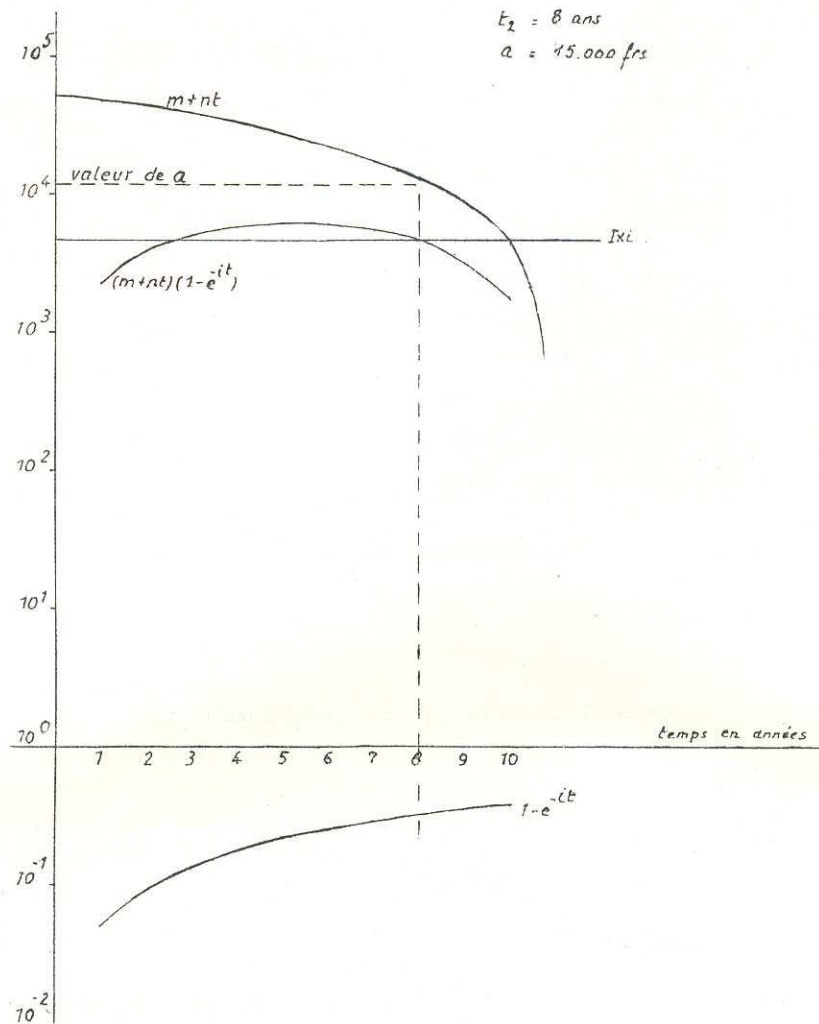


Fig. 9.

Si le produit $I \times i$ est supérieur à ce maximum, la relation (14) ne nous donne pas de solution réelle.

La valeur du temps t pour lequel $(m + nt) (1 - e^{-it})$ atteint son maximum peut facilement s'obtenir en annulant la dérivée première :

$$(m + nt_{\max})e^{-it_{\max}} \times i + n(1 - e^{-it_{\max}}) = 0, \text{ ou} \\ n(e^{it_{\max}} - 1) + i(m + nt) = 0,$$

c.-à-d. avec une approximation grossière en remplaçant $e^{it_{\max}} - 1$ par $it_{\max}$ (cf. série de Mac Laurin) $nit_{\max} + mi + nit_{\max} = 0$; d'où $t_{\max} \cong \frac{m}{-2n}$.

Pour que l'équation (14) nous apporte une solution réelle, ou encore pour que le calcul d'une dotation d'amortissement constante soit possible, il faut que

$$I \leq \frac{(m + \frac{mn}{-2n})(1 - e^{\frac{mi}{-2n}})}{i} = \frac{m}{2i}(1 - e^{\frac{mi}{-2n}})$$

4°) De même l'amortissement par fonction linéaire décroissante ménageant un bénéfice net constant entraîne la condition suivante

$$t_2^2 \cong -\frac{2I}{n} < t_1^2 \text{ c'est-à-dire } I < -\frac{nt_1^2}{2}.$$

CONCLUSIONS

Nous avons passé en revue quelques applications d'une méthode de calcul pouvant servir de base mathématique à une prise de décision.

Nous avons admis implicitement un certain nombre d'hypothèses, telles qu'un taux d'intérêt, des unités monétaires stables et un régime économique où les prix sont fixés en dehors du problème examiné.

Les formules précédentes permettent également de se rendre compte des conséquences d'une variation des paramètres extérieurs.