

Alignement optimum d'arbres de navire

par

M. ALEXANDRE, L. DOR, J. MOULART, E. de WILDE

S.A. « Cockerill-Ougrée ».

RESUME.

Nous présentons ici un calcul d'alignement d'arbres de navire, optimisé à l'aide de la technique de programmation linéaire et relatif à la Division Construction de la S.A. Cockerill-Ougrée, à propos de la mise en place de la ligne d'arbres d'un tanker turbinié de 45.000 tonnes.

L'intérêt de cet exemple réside non seulement dans l'adaptation de la programmation linéaire à un problème technique, mais aussi dans la nature mathématique particulière de la « fonction économique » à optimiser, dans le sens du problème dual et enfin dans la simplification des méthodes.

Cette application peut ainsi intéresser les chercheurs opérationnels et avertir les mécaniciens des possibilités ouvertes par les techniques de la recherche opérationnelle.

Nous avons développé le sujet avec un souci d'exposé d'initiation.

SAMENVATTING.

Wij stellen hier een berekening voor van het aligneren van laadbomen, geoptimaliseerd met behulp van de lineaire programmatie techniek en betrekking hebbend op de afdeling Constructie van de N.V. Cockerill-Ougrée. Het handelt over het plaatsen van de masten van een turbine tanker van 45.000 ton.

Het belang van dit voorbeeld schuilt niet alleen in de aanpassing van de lineaire programmatie aan een technisch probleem, maar ook in de speciaal te optimaliseren « economische functie », in de zin van het dualistisch probleem en tenslotte in de vereenvoudiging van de methodes.

Deze toepassing kan aldus de geïnteresseerden voor operationeel onderzoek belang inboezemen en zij kan tevens de mekaniëkers inlichtingen over de, door de technieken van het operationeel onderzoek, geopende wegen.

Wij hebben het onderwerp ontwikkeld met een zorg nodig voor een inleidende behandeling.

1. — POSITION DU PROBLEME.

Dans un article américain récent [1] des ingénieurs de la General Electric Company ont montré l'influence de l'alignement d'une ligne d'arbres de turbinié sur la charge des paliers. En fait, la ligne d'arbres est une poutre continue dont on peut facilement déterminer au moyen d'un calculateur électronique, les réactions. Dans le cas étudié dans la publication américaine, les 2 derniers paliers sont les paliers de la roue secondaire d'un réducteur à double réduction et denture hélicoïdale en chevron et les 2 premiers sont les 2 buselures de l'arbre porte-hélice. Si on suppose que les paliers sont parfaitement alignés au montage, on constate qu'en marche, par suite de la dilatation du carter du réducteur, les réactions sur ses paliers deviennent fortement inégales ce qui provoque une légère obliquité des axes capable d'augmenter localement la pression spécifique sur les dentures et ainsi de favoriser l'apparition de pitting.

La détermination des coefficients d'influence des paliers, c'est-à-dire de la variation de toutes les réactions provoquées par une dénivellation unitaire d'un des paliers permet d'établir les désalignements qu'il faut mettre au montage, c'est-à-dire « à froid » pour que pendant la marche normale, appelée fonctionnement « à chaud », les réactions sur les paliers du réducteur soient égales.

[1] G — Ordinated Alignment of Line Shaft Propulsion Gear, and Turbine. HC Andersen et J.J. Zrodowski. The Society of Naval Architects and Marine Engineers. Advance copy of paper 12.11.1959.

Alignement optimum d'arbres de navire

par

M. ALEXANDRE, L. DOR, J. MOULART, E. de WILDE

S.A. « Cockerill-Ougrée ».

RESUME.

Nous présentons ici un calcul d'alignement d'arbres de navire, optimisé à l'aide de la technique de programmation linéaire et relatif à la Division Construction de la S.A. Cockerill-Ougrée, à propos de la mise en place de la ligne d'arbres d'un tanker turbinier de 45.000 tonnes.

L'intérêt de cet exemple réside non seulement dans l'adaptation de la programmation linéaire à un problème technique, mais aussi dans la nature mathématique particulière de la « fonction économique » à optimiser, dans le sens du problème dual et enfin dans la simplification des méthodes.

Cette application peut ainsi intéresser les chercheurs opérationnels et avertir les mécaniciens des possibilités ouvertes par les techniques de la recherche opérationnelle.

Nous avons développé le sujet avec un souci d'exposé d'initiation.

SAMENVATTING.

Wij stellen hier een berekening voor van het aligneren van laadbomen, geoptimaliseerd met behulp van de lineaire programmatie techniek en betrekking hebbend op de afdeling Constructie van de N.V. Cockerill-Ougrée. Het handelt over het plaatsen van de masten van een turbine tanker van 45.000 ton.

Het belang van dit voorbeeld schuilt niet alleen in de aanpassing van de lineaire programmatie aan een technisch probleem, maar ook in de speciaal te optimaliseren « economische functie », in de zin van het dualistisch probleem en tenslotte in de vereenvoudiging van de methodes.

Deze toepassing kan aldus de geïnteresseerden voor operationeel onderzoek belang inboezemen en zij kan tevens de mekaniekers inlichtingen over de, door de technieken van het operationeel onderzoek, geopende wegen.

Wij hebben het onderwerp ontwikkeld met een zorg nodig voor een inleidende behandeling.

1. — POSITION DU PROBLEME.

Dans un article américain récent [1] des ingénieurs de la General Electric Company ont montré l'influence de l'alignement d'une ligne d'arbres de turbinier sur la charge des paliers. En fait, la ligne d'arbres est une poutre continue dont on peut facilement déterminer au moyen d'un calculateur électronique, les réactions. Dans le cas étudié dans la publication américaine, les 2 derniers paliers sont les paliers de la roue secondaire d'un réducteur à double réduction et denture hélicoïdale en chevron et les 2 premiers sont les 2 buselures de l'arbre porte-hélice. Si on suppose que les paliers sont parfaitement alignés au montage, on constate qu'en marche, par suite de la dilatation du carter du réducteur, les réactions sur ses paliers deviennent fortement inégales ce qui provoque une légère obliquité des axes capable d'augmenter localement la pression spécifique sur les dentures et ainsi de favoriser l'apparition de pitting.

La détermination des coefficients d'influence des paliers, c'est-à-dire de la variation de toutes les réactions provoquées par une dénivellation unitaire d'un des paliers permet d'établir les désalignements qu'il faut mettre au montage, c'est-à-dire « à froid » pour que pendant la marche normale, appelée fonctionnement « à chaud », les réactions sur les paliers du réducteur soient égales.

[1] G — Ordinated Alignment of Line Shaft Propulsion Gear, and Turbine. HC Andersen et J.J. Zrodowski. The Society of Naval Architects and Marine Engineers. Advance copy of paper 12.11.1959.

Dans le problème qui nous a occupés, il s'agissait d'un réducteur « locked train » à denture hélicoïdale simple de telle sorte que les 4 pignons secondaires exercent une poussée axiale sur la roue créant ainsi un couple qui charge un palier et décharge l'autre.

Au début de l'étude, quelques essais effectués par tâtonnement avaient laissé subsister une différence sur les paliers du réducteur, différence un peu supérieure à celle qu'on avait trouvée en supposant les paliers alignés et le carter non dilaté.

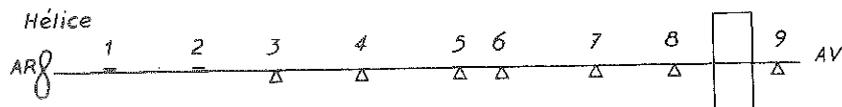
Cette constatation nous a amenés à un problème important qui consistait à savoir si un certain désalignement ne pouvait diminuer voire annuler, la différence entre les 2 réactions intéressantes.

Cette notion d'optimisation de fonction, jointe à la structure linéaire des équations du système, a fait penser à utiliser la technique de programmation linéaire.

2. — MISE EN EQUATIONS.

— Grâce aux coefficients d'influence, variation de la charge d'un palier i due à la dénivellation unitaire du palier j , les réactions sur chaque palier peuvent être exprimées en fonction de leurs dénivellations δ_i .

Une série d'inéquations sont relatives aux conditions qu'on impose aux réactions pendant le montage. Une autre série correspond aux conditions de service, la dilatation du carter du réducteur étant évaluée à 0,3 mm.



Graphique I.

Les buselures de l'arbre porte-hélice étant constituées de lattes de caoutchouc, pour éviter l'usure de la buselure avant, nous imposons au palier 2 une poussée vers le bas comprise entre 1.900 et 2.100 kg.

Le palier 3 qui doit reprendre le couple dû au poids de l'hélice subit un effort vers le haut qui doit rester faible, nous avons admis 2.500 à 2.700 kg.

Pour être certain que tous les autres paliers portent une charge, nous imposons une valeur minimum égale à 1.000 kg.

Par ailleurs, si nous définissons l'axe de référence par la ligne « buselure arrière, paliers du réducteur », nous pouvons poser

$$\delta_1 = \delta_n = \delta_{11} = 0.$$

Les paliers 5 et 6 appartenant au palier de butée, nous appelons δ_s leur dénivellation commune et nous tiendrons compte de la somme des coefficients d'influence relatifs à ces 2 paliers.

Il s'ensuit que si nous appelons

C_{ij} les coefficients d'influence

T_i la charge sur l'appui i , tous les paliers étant alignés

Δ le déplacement des paliers 8 et 9 du réducteur

k_i la charge due à la transmission de puissance

on a sur le palier i ($i = 1, \dots, 9$)

réaction à froid

$$R_i = T_i + C_{i1} \delta_1 + C_{i2} \delta_2 + \dots + C_{i9} \delta_9$$

réaction à chaud

$$R'_i = R_i + (C_{i8} + C_{i9}) \Delta + k_i.$$

Les coefficients C_{ij} et k_i sont repris aux tableaux I et II.

TABLEAU I. — Matrice des coefficients d'influence relatifs aux dénivellations.

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 2.021 & -3.836 & +1.997 & -291 & +195 & -91 & +6 & -3 & +1 \\ -3.836 & +7.775 & -4.696 & +1.204 & -809 & +378 & -21 & +10 & -4 \\ +1.997 & -4.696 & +3.808 & -2.054 & +1.720 & -804 & +46 & -21 & +8 \\ -291 & +1.204 & -2.054 & +3.911 & -7.068 & +4.472 & -252 & +121 & -44 \\ +195 & -809 & +1.720 & -7.068 & +24.245 & -21.385 & +4.451 & -2.118 & +772 \\ -91 & +378 & -804 & +4.472 & -21.385 & +21.875 & -6.925 & +3.896 & -1.419 \\ +6 & -21 & +46 & -252 & +4.451 & -6.925 & +6.930 & -8.234 & +4.004 \\ -3 & +10 & -21 & +121 & -2.118 & +3.896 & -8.234 & +14.197 & -7.847 \\ +1 & -4 & +8 & -44 & +772 & -1.419 & +4.004 & -7.847 & +4.531 \end{pmatrix}$$

TABLEAU II. — Coefficients d'influence relatifs à la transmission de puissance.

Paliers	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	0	0	-1	+5	-88	+165	-463	+15.119	+1.013

Les conditions imposées aux réactions conduisent aux relations suivantes :

— Conditions à froid

$$\begin{aligned} R_1 &= 68.351 - 3.836 \delta_2 + 1.997 \delta_3 - 291 \delta_4 + 104 \delta_5 - 6 \delta_7 \cong 1.000 \\ R_2 &= -29.321 + 7.775 \delta_2 - 4.696 \delta_3 + 1.204 \delta_4 - 431 \delta_5 - 21 \delta_7 \cong 2.100 \text{ kg} \\ R''_2 &= -29.321 + 7.775 \delta_2 - 4.696 \delta_3 + 1.204 \delta_4 - 431 \delta_5 - 21 \delta_7 \cong 1.900 \\ R_3 &= 15.390 - 4.696 \delta_2 + 3.808 \delta_3 - 2.054 \delta_4 + 916 \delta_5 + 46 \delta_7 \cong 2.700 \text{ kg} \quad (5) \\ R'_3 &= 15.390 - 4.696 \delta_2 + 3.808 \delta_3 - 2.054 \delta_4 + 916 \delta_5 + 46 \delta_7 \cong 2.500 \text{ kg} \quad (6) \\ R_4 &= 7.744 + 1.204 \delta_2 - 2.054 \delta_3 + 3.911 \delta_4 - 2.596 \delta_5 - 252 \delta_7 \cong 1.000 \quad (7) \\ R_5 &= 4.733 - 809 \delta_2 + 1.720 \delta_3 - 7.068 \delta_4 + 2.860 \delta_5 + 4.451 \delta_7 \cong 1.000 \\ R_6 &= 8.777 + 378 \delta_2 - 804 \delta_3 + 4.472 \delta_4 + 490 \delta_5 - 6.927 \delta_7 \cong 1.000 \quad (9) \\ R_7 &= 6.689 - 21 \delta_2 + 46 \delta_3 - 252 \delta_4 - 2.474 \delta_5 + 6.930 \delta_7 \cong 1.000 \\ R_8 &= 19.835 + 10 \delta_2 - 21 \delta_3 + 121 \delta_4 + 1.778 \delta_5 - 8.234 \delta_7 \cong 1.000 \quad (11) \\ R_9 &= 13.962 - 4 \delta_2 + 8 \delta_3 - 44 \delta_4 - 647 \delta_5 + 4.004 \delta_7 \cong 1.000 \end{aligned}$$

— Conditions à chaud

$$\begin{aligned} R'_1 &= 68.345 - 3.836 \delta_2 + 1.997 \delta_3 - 291 \delta_4 + 104 \delta_5 - 6 \delta_7 \cong 1.000 \quad (2) \\ R'_2 &= -29.303 + 7.775 \delta_2 - 4.696 \delta_3 + 1.204 \delta_4 - 431 \delta_5 - 21 \delta_7 \cong 2.100 \text{ kg} \quad (3) \\ R''_2 &= -29.303 + 7.775 \delta_2 - 4.696 \delta_3 + 1.204 \delta_4 - 431 \delta_5 - 21 \delta_7 \cong 1.900 \quad (4) \\ R'_3 &= 15.350 - 4.696 \delta_2 + 3.808 \delta_3 - 2.054 \delta_4 + 916 \delta_5 + 46 \delta_7 \cong 2.700 \\ R''_3 &= 15.350 - 4.696 \delta_2 + 3.808 \delta_3 - 2.054 \delta_4 + 916 \delta_5 + 46 \delta_7 \cong 2.500 \\ R'_4 &= 7.980 + 1.204 \delta_2 - 2.054 \delta_3 + 3.911 \delta_4 - 2.596 \delta_5 - 252 \delta_7 \cong 1.000 \\ R'_5 &= 607 - 809 \delta_2 + 1.720 \delta_3 - 7.068 \delta_4 + 2.860 \delta_5 + 4.451 \delta_7 \cong 1.000 \quad (8) \\ R'_6 &= 16.373 + 378 \delta_2 - 804 \delta_3 + 4.472 \delta_4 + 490 \delta_5 + 6.927 \delta_7 \cong 1.000 \\ R'_7 &= -6.464 - 21 \delta_2 + 46 \delta_3 - 252 \delta_4 - 2.474 \delta_5 + 6.930 \delta_7 \cong 1.000 \quad (10) \\ R'_8 &= 54.004 + 10 \delta_2 - 21 \delta_3 + 121 \delta_4 + 1.778 \delta_5 - 8.234 \delta_7 \cong 1.000 \\ R'_9 &= 5.027 - 4 \delta_2 + 8 \delta_3 - 44 \delta_4 - 647 \delta_5 + 4.004 \delta_7 \cong 1.000 \quad (12) \end{aligned}$$

On constate immédiatement que, dans chaque cas, l'une des deux conditions est plus sévère que l'autre, c'est-à-dire qu'en satisfaisant l'une, on satisfait l'autre.

Nous avons donné un numéro d'ordre aux conditions les plus sévères.

On obtient ainsi le système d'inégalités (2) à (12).

3. — FONCTION A OPTIMISER.

Outre les conditions ci-dessus, on désire que les réactions des paliers 8 et 9 à chaud soient aussi voisines que possible, ce qui revient à dire qu'on cherche à minimiser la différence absolue entre R'_8 et R'_9 , c'est-à-dire qu'on recherche également le minimum de f .

$$\text{avec } f = |R'_8 - R'_9|. \quad (1)$$

(1) associée au système (2) à (12) fait penser à la forme d'un problème de programmation linéaire, sous la réserve que la fonction économique est ici la valeur absolue d'une expression linéaire des inconnues.

Si nous savions a priori que

$$R'_8 \geq R'_9 \quad \text{soit } R'_8 - R'_9 = p \quad \text{avec } p \geq 0$$

nous pourrions appliquer la technique de programmation linéaire et rechercher le minimum de p .

De même, si nous savions a priori que nous sommes dans le cas opposé.

$$R'_8 \leq R'_9 \quad \text{soit } R'_9 - R'_8 = q \quad \text{avec } q \geq 0$$

nous pourrions rechercher le minimum de q .

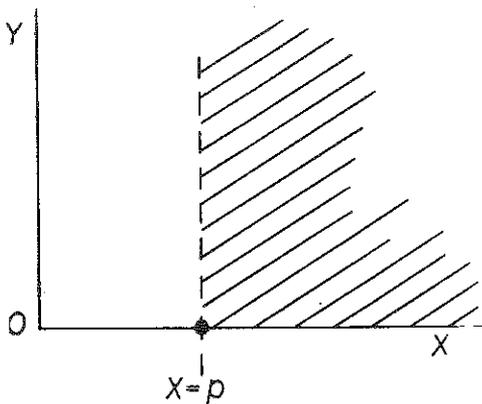
Une astuce va permettre d'associer les 2 cas.

Considérons d'abord le programme linéaire auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} R'_8 - R'_9 - X &\leq 0 & (a) \\ R'_9 - R'_8 - Y &\leq 0 & (b) \\ \text{avec } X &\geq 0 & (c) \\ Y &\geq 0 & (d) \end{aligned}$$

et la fonction économique

$$X + Y \quad (e).$$



Graphique II.

Ce programme auxiliaire peut se résoudre directement.

$$\text{Si } R'_8 \geq R'_9 \quad \text{soit } R'_8 - R'_9 = p \quad \text{avec } p \geq 0,$$

on a le graphique II. La solution se trouve sur ou à droite de (a) soit $X \geq p$ et sur ou au-dessus de (d), soit $Y \geq 0$.

(c) est surabondant par rapport à (a) et (d) l'est par rapport à (b).

Le min $(X + Y)$ se trouve évidemment en $X = p, Y = 0$.

$$\text{Si } R'_8 \leq R'_9 \quad \text{soit } R'_9 - R'_8 = q \quad \text{avec } q \geq 0,$$

on verra de même que le min $(X + Y)$ se trouve en $X = 0, Y = q$.

$R'_8 = R'_9$ est le cas limite intermédiaire $X = Y = 0$.

En conséquence, le min $(X + Y)$ se trouve toujours être la valeur absolue $|R'_8 - R'_9|$ quelle que soit celle-ci.

Une solution satisfaisant au système (2) à (12) et au système auxiliaire (a) à (e) répond ainsi à nos préoccupations. Cela revient donc à substituer à la recherche du minimum de f , celle de

$$\min (X + Y)$$

à condition d'associer le système (a), (b), (c), (d) aux relations (2) à (12).

Or, cette substitution transforme notre problème en un problème de programmation linéaire ordinaire.

4. — ADAPTATION AU SIMPLEX.

Il convient maintenant d'adapter nos relations à la forme ordinaire de la technique de résolution du Simplex.

— Tout d'abord nous veillerons à traiter des variables non-négatives, c'est-à-dire dans notre cas uniquement des déplacements des paliers au-dessus de l'axe de référence.

A cet effet, nous avons effectué le changement de variable

$$x_i = \delta_i + 10$$

l'unité de déplacement étant le 0,1 mm. Les relations qui en découlent sont recopiées ci-dessous et numérotées de (2) à (12), comme celles dont elles proviennent.

$$\begin{aligned} 3836 x_2 - 1997 x_3 + 291 x_4 - 104 x_5 + 6 x_7 &\leq 87.665 & (2) \\ 7775 x_2 - 4696 x_3 + 1204 x_4 - 431 x_5 - 21 x_7 &\leq 69.713 & (3) \\ - 7775 x_2 + 4696 x_3 - 1204 x_4 + 431 x_5 + 21 x_7 &\leq - 69.513 & (4) \\ 4696 x_2 - 3808 x_3 + 2054 x_4 - 916 x_5 - 46 x_7 &\leq 37.890 & (5) \\ - 4696 x_2 + 3808 x_3 - 2054 x_4 + 916 x_5 + 46 x_7 &\leq - 37.690 & (6) \\ - 1204 x_2 + 2054 x_3 - 3911 x_4 + 2596 x_5 + 252 x_7 &\leq 4.614 & (7) \\ 809 x_2 - 1720 x_3 + 7068 x_4 - 2860 x_5 - 4451 x_7 &\leq - 11.933 & (8) \\ - 378 x_2 + 804 x_3 - 4472 x_4 - 490 x_5 + 6925 x_7 &\leq 31.687 & (9) \\ 21 x_2 - 46 x_3 + 252 x_4 + 2474 x_5 - 6930 x_7 &\leq - 49.754 & (10) \\ - 10 x_2 + 21 x_3 - 121 x_4 - 1778 x_5 + 8234 x_7 &\leq 82.295 & (11) \\ 4 x_2 - 8 x_3 + 44 x_4 + 647 x_5 - 4004 x_7 &\leq - 29.143 & (12) \end{aligned}$$

— Les inéquations (a) et (b), dans lesquelles R'_a et R'_b sont remplacées par leurs valeurs en fonction des x_i , s'écriront maintenant :

$$14 x_2 - 29 x_3 + 165 x_4 + 2425 x_5 - 12.238 x_7 - X \leq - 145.607 \quad (13)$$

$$- 14 x_2 + 29 x_3 - 165 x_4 - 2425 x_5 + 12.238 x_7 - Y \leq 145.607 \quad (14)$$

— Dans les relations (2) à (14), toutes les inégalités ont le même sens, condition pour pouvoir appliquer notre programme du simplex.

— Une autre condition impose de rendre les seconds membres positifs. A cet effet, on ajoute aux seconds membres de certaines relations une constante de grandeur suffisante, par exemple $\beta = 150.000$, ce qui nécessite par ailleurs l'introduction d'une équation supplémentaire (équation n° 15 du tableau III).

— Enfin, après un changement d'unités, nous pouvons écrire le tableau III qui contient l'ensemble des éléments du problème, c'est-à-dire ceux du système matriciel

$$A x \leq c$$

où x est le vecteur des inconnues ($x_2, \dots, x_7, X, Y, \beta$) vecteur non négatif

$$x \geq 0 \quad \text{soit } (x_2 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0, \dots, \beta \geq 0)$$

c le vecteur des contraintes (avant-dernière colonne de T. III)
et A la matrice des coefficients techniques, doublement encadrée dans le T. III.

— La dernière adaptation au simplexe consiste à associer au système matriciel ainsi défini la recherche d'un maximum d'une relation linéaire $p x$.

Celle-ci s'obtiendra à partir d'un changement de signe. Nous chercherons donc le

$$\text{Max } [-X - Y]$$

soit la première ligne du T. III.

5. — SOLUTION OPTIMUM.

Le problème ainsi posé a été résolu par calculateur électronique (dans notre cas IBM 650), qui a fourni la solution suivante :

$$\begin{array}{ll} x_2 = 0,1407508 & \text{soit } \delta_2 = 0,4075 \text{ mm} \\ x_3 = 0,1017189 & \text{» } \delta_3 = 0,0172 \text{ mm} \\ x_4 = 0,1337692 & \text{» } \delta_4 = 0,3377 \text{ mm} \\ x_5 = 0,1801428 & \text{» } \delta_5 = 0,8014 \text{ mm} \\ x_7 = 0,1407211 & \text{» } \delta_7 = 0,4072 \text{ mm} \end{array}$$

Fonction économique = $-X$

$$X = 0,1918757 \quad \text{soit } R'_5 - R'_6 = 19.188 \text{ kg.}$$

Les relations (3), (5), (9), (10), (11) et les auxiliaires (13), (15) sont transformées en égalités, c'est-à-dire que les 5 inconnues x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 sont en fait déterminées par les cas d'égalité de (3), (5), (9), (10) et (11).

Par contre, les contraintes figurant aux seconds membres de (2), (4), (6), (7), (8), (12) et l'auxiliaire (14) sont surfaites. Cette dernière correspond d'ailleurs à $Y = 0$, tandis que le deuxième membre de

$$\left. \begin{array}{lll} (2) \text{ est surfait de } 0,5188244 \\ (4) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,0020000 \\ (6) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,0020000 \\ (7) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,0267322 \\ (8) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,1378368 \\ (12) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,1498315 \\ (14) \text{ » } \text{ » } \text{ » } 0,1918581 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Résultats évidents} \\ \text{en vertu du chapitre 2.} \end{array}$$

Dans le tableau IV, nous avons calculé les réactions au montage et en service sur tous les paliers et nous avons souligné les valeurs pour lesquelles dans les conditions imposées c'est l'égalité qui est respectée.

— Signalons qu'en dehors du problème que nous traitons ici, l'élasticité des paliers des arbres intermédiaires a été mesurée en nos ateliers et que celle-ci constitue un élément favorable qui nivelle plus ou moins les différentes réactions de la ligne d'arbres (étude de l'installation comme une poutre continue posée sur appuis élastiques).

6. — DUAL.

On sait qu'au problème symbolisé par la recherche du

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } p x \\ \text{sous les conditions } x \geq 0 \\ A x \leq c \end{array} \right\} \text{ problème dit primal}$$

s'associe le problème de la recherche du

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } c u \\ \text{sous les conditions } u \geq 0 \\ u A \geq p \end{array} \right\} \text{ problème dit dual.}$$

Ce problème dual traduit celui de la sensibilité marginale des contraintes vis-à-vis du niveau de l'optimum.

TABLEAU III. — Données du Simplex.

Numéro d'itération	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	X	Y	β	Second membre (contraintes)	Variables duales
1	0	0	0	0	0	-1,000	-1,000	0	→ Max.	
2	+ 3,836	- 1,997	+ 0,291	- 0,104	+ 0,006	0	0	0	0,87665	u_1
3	+ 7,775	- 4,696	+ 1,204	- 0,431	- 0,021	0	0	0	0,69713	u_2
4	- 7,775	+ 4,696	- 1,204	+ 0,431	+ 0,021	0	0	+ 1,000	0,80487	u_3
5	- 4,696	+ 3,808	- 2,054	+ 0,916	+ 0,046	0	0	+ 1,000	1,12310	u_4
6	+ 4,696	- 3,808	+ 2,054	- 0,916	- 0,046	0	0	0	0,37890	u_5
7	- 1,204	+ 2,054	- 3,911	+ 2,596	+ 0,252	0	0	0	0,04614	u_6
8	+ 0,809	- 1,720	+ 7,068	- 2,860	- 4,451	0	0	+ 1,000	1,38067	u_7
9	- 0,378	+ 0,804	- 4,472	- 0,490	+ 6,927	0	0	0	0,31687	u_8
10	+ 0,021	- 0,046	+ 0,252	+ 2,474	- 6,930	0	0	+ 1,000	1,00246	u_9
11	- 0,010	+ 0,021	- 0,121	- 1,778	+ 8,234	0	0	0	0,82295	u_{10}
12	+ 0,004	- 0,008	+ 0,044	+ 0,647	- 4,004	0	0	+ 1,000	1,20857	u_{11}
13	+ 0,014	- 0,029	+ 0,165	+ 2,425	- 12,238	- 1,000	0	+ 1,000	0,04393	u_{12}
14	- 0,014	+ 0,029	- 0,165	- 2,425	+ 12,238	0	- 1,000	0	1,45607	u_{13}
15	0	0	0	0	0	0	0	+ 1,000	1,50000	

TABLEAU IV

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Paliers alignés au montage à froid	68.351	— 29.321	15.390	7.744	4.733	8.777	6.689	19.835	13.962
2. Paliers alignés à chaud $\delta_8 = \delta_9 = 0,3$	68.345	— 29.303	15.350	7.977	607	16.373	— 6.464	54.004	5.027
$\delta_2 = 0,4075$	— 15.632	31.683	— 19.136	4.906	— 3.297	1.540	— 86	41	— 16
$\delta_3 = 0,0172$	+ 343	— 808	655	— 353	296	— 138	8	— 4	— 1
$\delta_4 = 0,3377$	— 983	4.066	— 6.936	13.207	— 23.869	15.102	— 851	409	— 149
$\delta_5 = \delta_6 = 0,8014$	+ 833	— 3.454	+ 7.341	— 20.804	22.920	+ 3.927	— 19.827	+ 14.249	— 5.185
$\delta_7 = 0,4072$	+ 24	— 86	+ 187	— 1.026	+ 18.124	— 28.207	+ 28.219	— 33.529	+ 16.304
3. Somme des réactions provenant des déplacements	— 15.415	31.401	— 17.889	— 4.070	14.174	— 7.776	7.463	— 18.834	10.955
1. + 3.	52.936	2.080	— 2.499	3.674	18.907	1.001	14.152	1.001	24.917
Réactions à froid									
2. + 3.	52.930	2.098	— 2.539	3.907	14.781	8.597	999	35.170	15.982
Réactions à chaud									

Ce dual s'obtient pratiquement à partir du Tableau III, en renversant le rôle des lignes et des colonnes. Mais le calculateur nous a fourni en une seule fois les conclusions du dual. Elles figurent au Tableau V.

La colonne « solution » rappelle ce qui a été vu au chapitre précédent.

Les colonnes « 3 » ... « 15 » fournissent les incidences sur la solution optimum d'une modification aux contraintes du second membre des relations correspondantes (3), ..., (15).

Ainsi, supposons une modification de 100 kg à la contrainte 2.100 kg de la relation (3) chapitre 2. Elle modifie la contrainte 0,69713 du Tableau III, qui devient 0,69613, soit un changement de $-0,001$ unité.

La fonction économique variera de

$$-0,001 \times 0,00033 = -0,00000033$$

elle serait donc pratiquement inchangée.

Il apparaît de suite à la lecture de la ligne « fonction économique » du Tableau V que celle-ci est peu sensible aux variations des contraintes des relations (3), (5) et (9), mais le devient pour (10) et surtout pour (11).

Quant aux autres données de la colonne (3), elles s'interprètent comme suit : la réduction de 100 kg de la contrainte réduit par exemple la variable structurale x_2 à :

$$0,1407508 - 0,001 \times 0,56098 = 0,1401898 .$$

Il apparaît également que la variable structurale x_3 est la plus sensible à la modification de la contrainte de la relation (3), tandis que la relation (4) s'indique comme la plus vite transformée en égalité. Un écart de -200 kg transformerait la relation (4) en égalité. En effet, l'écart deviendrait

$$0,002000 - 0,002 \times 1 = 0 .$$

ce que nous savions déjà en raison de la nature des relations (3) et (4). Mais le Tableau V nous apprend en outre que la substitution de (4) à (3) ne modifie guère l'optimum et nous permet de calculer les modifications entraînées.

Les autres colonnes s'interpréteraient suivant la même voie.

7. — METHODE COMBINATOIRE.

Le primal nous a appris que l'optimum de la fonction étudiée $R^1 - R^0$ correspondait aux cinq variables x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 satisfaisant aux cas d'égalité tirés des cinq relations (3), (5), (9), (10) et (11).

Le dual nous a appris notamment que cet optimum était pratiquement le même en calculant ces mêmes variables à partir des égalités extraites des relations précédentes où (3) est remplacé par (4).

Mais, sachant ainsi que la fonction étudiée est optimum pour le point $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_7]$ satisfaisant à une combinaison donnée de 5 égalités compatibles extraites des relations (2) à (12), une méthode combinatoire plus directe se présente à nous. Elle consistera à considérer les différentes combinaisons de 5 équations extraites des 11 relations, à résoudre ces diverses combinaisons, à calculer la fonction économique étudiée et à retrouver la solution optimum, ou plutôt à choisir parmi les solutions d'un même ordre, celle qui satisfait le mieux le technicien, considérant ici que des contingences pratiques non incorporées dans les relations mathématiques pourraient orienter le choix entre des solutions donnant des fonctions économiques voisines.

Pour procéder de la sorte, un autre programme doit être fourni au calculateur. Il peut l'être directement à partir des relations (2) à (12) du ch. 2. Il conduit aux conclusions reprises au Tableau VI.

TABLEAU V. — Résultats du simplex

	SOLUTION	RELATIONS DEVENUES EGALITES DANS LA SOLUTION										Variable exclue Y		
		STRUCTURALES					AUXILIAIRES							
		3	5	9	10	11	13	15						
Fonction économique	— 0,1918757	0,00033	0,00066	0,00389	0,21813	1,66658	1	48,781	1				1	
Variables de la fonction														
— Structurales x_2	0,1407508	0,56098	0,73072	— 0,19704	— 0,23946	— 0,03842	0	— 0,4913	0				0	
x_3	0,1017189	0,73768	1,25166	— 0,40020	— 0,44514	— 0,04307	0	— 0,8065	0				0	
x_4	0,1337692	0,08552	0,16381	— 0,27048	0,16740	0,37279	0	— 0,3312	0				0	
x_5	0,1801428	0,00102	0,00170	0,03341	0,98741	0,80292	0	— 0,9891	0				0	
x_7	0,1407211	0,00028	0,00047	0,00393	0,21652	0,30037	0	— 0,2170	0				0	
— Auxiliaires X	0,1918581	— 0,00034	— 0,00066	— 0,00388	— 0,21812	— 1,66659	— 1	1,2188	— 1				0	
β	1,4999993	0	0	0	0	0	0	1	0				0	
Relations ayant le signe < dans la solution														
— Structurales 2	0,5188244	— 0,70355	— 0,35095	0,04055	0,08230	0,03459	0	0,2686	0				0	
4	0,0020000	1,00000	0	0	0	0	0	— 1	0				0	
6	0,0020000	0	1	0	0	0	0	— 1	0				0	
7	0,0267322	— 0,50800	— 1,05501	— 0,58425	— 1,33716	— 0,65989	0	2,3922	0				0	
8	0,1378368	0,21463	0,41087	1,53826	2,03260	0,95543	0	— 3,4435	0				0	
12	0,1498315	0,00034	0,00066	0,00388	0,21812	0,66659	0	— 1,2188	0				0	
— Auxiliaire 14	0,1918581	— 0,00034	— 0,00066	— 0,00388	— 0,21812	— 1,66659	0	0,2188	— 1				— 1	

TABLEAU VI. — Méthode combinatoire

COMBINAISON DE 5 EGALITES						
	(3), (5) (9), (10), (11)	(4), (5) (9), (10), (11)	(3), (6) (9), (10), (11)	(3), (5) (8), (10), (11)	(3), (5) (8), (9), (11)	(3), (5) (8), (9), (10)
$R'_3 - R'_5$	19.187,57	19.187,64	19.187,70	19.222	20.667	43.231
ECART						
2) $R'_1 - 1000$	51.882,44	52.023,15	51.952,63	51.519	51.324	51.383
3) $2100 - R'_2$	0	200	0	0	0	0
4) $R'_2 - 1900$	200	0	200	200	200	200
5) $2700 - R_5$	0	0	200	0	0	0
6) $R'_3 - 2500$	200	200	0	200	200	200
7) $R_4 - 1000$	2.673,22	2.774,82	2.884,22	7.908	11.740	12.193
8) $R'_5 - 1000$	13.783,68	13.740,75	13.701,51	0	0	0
9) $R_6 - 1000$	0	0	0	8.960	0	0
10) $R'_7 - 1000$	0	0	0	0	6.781	0
11) $R_8 - 1000$	0	0	0	0	0	14.427
12) $R'_8 - 1000$	14.983,15	14.983,08	14.983,02	14.948	13.504	5.366
VALEUR DE						
δ_2	0,407508	0,396288	0,392894	0,5841	0,5699	0,4629
δ_3	0,017189	0,002435	— 0,007844	0,3758	0,3190	0,0793
δ_4	0,337692	0,335982	0,334416	0,5854	0,2242	— 0,2000
$\delta_5 = \delta_6$	0,801428	0,801408	0,801394	0,7715	0,1319	— 0,3570
δ_7	0,407211	0,407205	0,407202	0,4037	0,2604	— 0,0261

D'où il résulte directement (et à nouveau) que les relations

(3) et (4) d'une part

(5) et (6) d'autre part

sont pratiquement les mêmes : les limites inférieures et supérieures imposées sur les paliers 2 et 3 se ramènent à des conditions de stabilité stricte, c'est-à-dire que la solution optimum

$$\begin{aligned}\delta_2 &= 0,40 \\ \delta_3 &= 0 \\ \delta_4 &= 0,34 \\ \delta_5 = \delta_6 &= 0,80 \\ \delta_7 &= 0,41\end{aligned}$$

satisfait pratiquement à l'ensemble des équations (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11) avec $R'_3 - R'_0 = 19.188$ kg.

Par contre, la substitution de l'équation (9) à l'équation (8), sans modifier de façon importante la fonction étudiée qui devient 19.222, conduit à des dénivellations assez distinctes, soit

$$\begin{aligned}\delta_2 &= 0,58 \\ \delta_3 &= 0,38 \\ \delta_4 &= 0,59 \\ \delta_5 = \delta_6 &= 0,77 \\ \delta_7 &= 0,40\end{aligned}$$

La substitution de l'équation (10) à l'équation (8) modifierait la fonction économique de façon plus sensible, etc.

Le Tableau VI fournit directement au technicien la possibilité d'un choix entre des solutions bien définies, avec leurs incidences respectives.

Cette méthode combinatoire peut, comme ici, s'avérer plus commode que celle du simplex car elle nous libère d'une série de précautions et d'adaptations qui peuvent rendre inutilement confuse l'application de la programmation linéaire.

Cette voie combinatoire est d'ailleurs de la même nature que l'approche des problèmes en atelier. Elle s'inscrit ainsi dans le courant nécessaire de simplification et de diffusion des méthodes de la Recherche Opérationnelle, mais elle ne s'impose par son évidence qu'après avoir pris conscience de celle-ci grâce à la connaissance des propriétés théoriques à la base de la programmation linéaire.