Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Vol.24, n° 1
Belgisch Tijdschrift voor Statistiek, Informatica en Operationeel Onderzoek, Vol.24, nr 1

PROPOSITIONS D'EXTENSION DE LA NOTION DE DOMINANCE EN PRESENCE DE RELATIONS D'ORDRE SUR LES PSEUDO-CRITERES : LA METHODE MELCHIOR

PAR J.P. LECLERCQ

Résumé : Cette note présente une méthode complètement ordinale d'aggrégation de préférences en présence d'une relation (d'ordre) quelconque R sur les critères. Appartenant à la famille ELECTRE, elle construit une relation de dominance S basée sur la notion de masque. En comparant l'action A à l'action B, on tente de masquer les critères défavorables à A par ceux défavorables à B; cette opération s'effectue sur un graphe biparti déduit de la relation R.

Mots clefs : Aggrégation de préférences, pseudo-critères, rangement, relation de dominance.

°

° °

Abstract : This note presents an entirely ordinal method to aggregate preferences using an (order) relation R on the criteria. It belongs to the ELECTRE family and uses an outranking relation S based on the notion of mask. When comparing action A to action, one tries to mask the criteria favourable to B by those favourable to A, this operation is made on a bipartite graph deducted from the relation R.

Keywords : Preferences aggregation, pseudo-criteria, ranking, outranking relation.

Paper presented at the Second National Congress on Operations Research (ORBEL 2).

1. INTRODUCTION

1.1. ORIGINE ET ENVIRONNEMENT DE LA METHODE

Lors de la réunion du groupe EURO-multicritère à Bochum, en octobre 1980, Bernard Roy a présenté des bases théoriques pour une extension de la notion de dominance lorque les pseudo-critères considérés (p.c.) n'étaient pas pondérés. [1]
Il supposait seulement l'absence de p.c. prépondérents ou négligeables. Ces propositions furent à la base de ELECTRE IV proposé lors de la réunion du même groupe à Bruxelles en octobre 1981 [6], [8].
Nous avons essayé d'étendre son approche au cas où les pondérations sont également absentes, mais où on connaît une relation d'ordre sur les p.c.(*) Nous montrerons que notre méthode contient ELECTRE IV comme cas particulier . (2.8.).

Il existe à notre connaissance deux autres méthodes adaptées à cette hypothèse; d'abord la méthode ORESTE proposée par M. Roubens [2] et [3]. Celle-ci utilise des préordres complets éventuellement déduits de pseudo-ordres initiaux sur les p.c.
Il s'agit d'une méthode partiellement ordinale utilisant une métrique dans un espace actions-critères.
L'autre méthode est QUALIFLEX de J.M.H. Paelinck [4] et [5]. Elle travaille au moyen d'intervalles de valeurs de poids concordant avec le pré-ordre original donné sur les p.c.
Notre méthode MELCHIOR (Méthode d'ELimination et de CHoix Incluant les relations d'ORdre) se distingue des précédentes par une approche entièrement non numérique et la possibilité de travailler sur n'importe quelle relation d'ordre(*) sur les p.c.
Citons enfin pour mémoire une intéressante méthode due à Saaty [7] permettant de déduire des poids d'une matrice de comparaison des ordres d'importance des critère pris deux à deux.
Le lecteur trouvera dans la section 3 une utilisation pratique des concepts introduits.

(*) En fait une relation quelconque peut être utilisée mais seules les relations d'ordre correspondent à une utilisation pratique.

1.2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

On dispose d'une famille $\mathcal{P}$ de n pseudo-critères avec pour chacun d'eux une fonctiond'evaluation g_j que l'on peut appliquer aux actions à classer (A, B, ... M). Si on compare deux actions A et B du point de vue du p.c. j, on notera :

$A\ P_j^+\ B$ ssi $g_j(A) > g_j(B) + s_j$

$A\ Q_j^+\ B$ ssi $g_j(A) \leqslant g_j(B) + s_j$ et $g_j(A) > g_j(B) + q_j$

$A\ I_j^+\ B$ ssi $g_j(A) \leqslant g_j(B) + q_j$ et $g_j(A) > g_j(B)$

$A\ E_j\ B$ ssi $g_j(A) = g_j(B)$

$A\ P_j^-\ B$ ssi $B\ P_j^+\ A$

$A\ Q_j^-\ B$ ssi $B\ Q_j^+\ A$

$A\ I_j^-\ B$ ssi $B\ I_j^+\ A$

Les seuils d'indifférence q_j et de préférence s_j peuvent dépendre de $g_j(B)$ et et bien sur $q_j \leqslant s_j$ pour tout j.

Il est également commode de définir à ce stade les seuils de veto v_j :

$AV_j^+\ B$ ssi $g_j(A) > g_j(B) + v_j$

Et bien sur $AV_j^-\ B$ ssi $BV_j^+\ A$

Convenons encore de poser :

$W^+ = \{P^+, Q^+, I^+\}$; $W_i^+ = \{P_i^+, Q_i^+, I_i^+\}$

$W^- = \{P^-, Q^-, I^-\}$; $W_i^- = \{P_i^-, Q_i^-, I_i^-\}$

$W = W^+ \cup W^-$; $W_i = W_i^+ \cup W_i^-$

2. CONSTRUCTION D'UNE RELATION DE SURCLASSEMENT UTILISANT UNE RELATION QUELCONQUE R SUR LES p.c.

2.1. Concept de concordance

Par ex. : R est défini par i R j ssi i est au moins aussi important que j.

L'idée présidant à la construction d'une relation de dominance est que A dominera B ssi les critères qui contredisent cette affirmation peuvent être *masqués* par ceux qui vont dans le sens de la dominance proposée. Plusieurs définitions peuvent être données au fait qu'un ensemble de critères en masque un autre. Pour exprimer cette idée proche de la notion de concordance des méthodes ELECTRE, introduisons la notation suivante :

$$m_{\omega}(A,B) = \{i \mid A\ \omega_i\ B,\ \omega_i \in \omega\};\ (\omega \subset W)$$

Exemple : si $\omega = \{P^+, Q^+\}$, $m_\omega(A,B)$ est l'ensemble des critères pour lesquels A est préféré à B fortement ou faiblement.

Formalisant l'idée ci-dessus, on dira que A domine B ssi $m_y(A,B)$ "masque" $m_x(A,B)$ où $x \subset W^-$ et $y \subset W^+$.
Le choix de x et de y ainsi que la définition du masque caractériseront une relation de dominance. (Ce choix ne peut être quelconque cfr. 2.6.).

2.1.1 Définitions du masque

I) M-masque

1) Si $m_x(A,B) = \emptyset$ alors $m_y(A,B)$ masque $m_x(A,B)$ quelque soit y, on notera yMx cette propriété

2) Si $m_x(A,B) \neq \emptyset$, construisons le graphe biparti G(Y,X,U) défini par

$Y = m_y(A,B)$
$X = m_x(A,B)$,
$(i,j) \in U \Leftrightarrow iRj.$

Alors, on dira que y M x ssi il existe une bijection entre une partie de $m_y(A,B)$ et $m_x(A,B)$ inclue dans U.

II) M-masque

1) cfr. I)

2) cfr. I), sauf $(i,j) \in U \Leftrightarrow iRj$ ou non(jRi)

Si $m_y(A,B)$ masque $m_x(A,B)$ au sens II, on notera naturellement y M x.

III) M°-masque

y M° x ssi y M x et en outre non x M y (sur le graphe G° déduit de G en inversant le sens des arcs).

IV) M^*-masque

y M^* x ssi y $\overline{M}$ x et en outre non x $\overline{M}$ y dans les mêmes conditions qu'en III).

2.1.2. Commentaires sur ces définitions.

Dans le cas d'un M-masque, un critère peut être masqué par un autre si celui-ci est au moins aussi important que lui. Dans le cas d'un $\overline{M}$-masque, il suffit que le second ne soit pas moins important que le premier.
Bien entendu, si R est un préordre total (complet), les deux définitions coïncident.
Les problèmes posés par l'existence de la bijection sont traités en annexe.
On peut souhaiter que certains critères (de W^+) en masquent d'autres (de W^-) et exiger en outre un "avantage effectif" des premiers en imposant en outre que la réciproque soit fausse, c'est la raison d'être des définitions III) et IV).

2.2. Concept de discordance

L'avantage acquis par une action A sur une action B du point de vue "importance globale" des critères en sa faveur peut être remise en cause par l'existence d'un ou plusieurs critères pour lesquels l'avantage de B sur A est trop important : c'est la notion de discordance.

Le surclassement de B par A supposera non seulement une concordance suffisante mais en outre l'absence de discordance : $\nexists j : g_j(B) > g_j(A) + v_j$ soit avec nos notations $m_{V^-}(A,B) = \emptyset$.

2.3. Applications

Dans son exposé précité, B. Roy proposait certaines définitions de relation de dominance. On peut obtenir des relations de dominance participant exactement des mêmes idées par un choix approprié de x, de y et du type de masque

Exemple 1 : Le choix $x = I^-$; $y = I^+ \cup Q^+ \cup P^+$, va permettre de définir une relation très analogue à la quasi-dominance en ajoutant les condition

a) $y\ M^\circ\ x$

b) $m_z(A,B) = \emptyset$ avec $z = Q^- \cup P^-$ c. à d. $v_j = q_j$ pour tout j

L'emploi du masque M° correspond à la restriction : "le nombre d'indifférences favorables à B est strictement inférieur au nombre d'avantages de A sur B".

Exemple 2 : Le choix $x = Q^-$; $y = Q^+ \cup P^+$ correspond de même à la pseudo-dominanc via les conditions

a) $y\ M\ x$

b) $m_z(A,B) = \emptyset$ avec $z = P^-$ c.à d. $v_j = s_j$ pour tout j.

Exemple 3 : Pour traduire la dominance canonique ; il est nécessaire d'utiliser deux masques ; soit $x_1 = Q^- \cup I^-$; $y_1 = I^+ \cup Q^+ \cup P^+$; $x_2 = Q^-$; $y_2 =$ et d'exprimer les conditions :

a) $y_1\ M^\circ\ x_1$

b) $y_2\ M\ x_2$

c) $m_z(A,B) = \emptyset$ avec $z = P^-$ c. à d. $v_j = s_j$ pour tout j

2.4. Famille de relations de dominance

La similitude des conditions apparues dans les applications suggère la définition d'une famille de relations de dominance à plusieurs paramètres $D(z, x_1, y_1, M_1, x_2, y_2, M_2, \ldots, x_n, y_n, M_n)$ où

$z \in \{\emptyset, I^- \cup Q^- \cup P^-, Q^- \cup P^-, P^- \vee^-\}$

$x_i \subset W^-$

$y_i \subset W^+$

$M_i \in \mathcal{M} = \{M, \overline{M}, M^\circ, M^*\}$; $i = 1, n$

on dira que A domine B au sens de $d \in D$ ssi

a) $m_z(A,B) = \emptyset$

b) $y_i\ M_i\ x_i$ pour tout $i = 1,n$

Il va de soi que seules les valeurs n = 1 et n = 2 conduisent à des relations de dominance réellement utilisables. De même, seuls certains éléments de $P(W^+)$ sont interressants (cf. 2.6.)

2.5. Classement de la famille D

Quelques règles simples permettent d'ordonner les éléments d de D. Vu le lien avec la sévérité de la relation définie, on posera d_1 S d_2 lorsque $d_1 \subset d_2$.
Nous étudierons seulement la famille à 4 paramètres D(z , x, y, M);

les résultats pourront s'etendre aux familles plus larges.

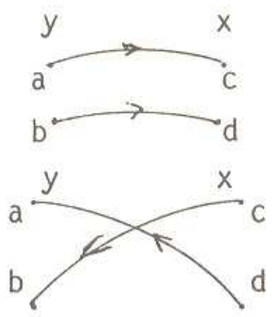
Pour tout $m \in \mathcal{M}$; $z \subset W^-$; $x \subset W^-$; $y \subset W^+$, on a :

R1 : d(z, x, y, m) S d(z', x, y, m) si $a' \subset a$
R2 : d(z, x, y, m) S d(z, x', y, m) si $x \supset x'$
R3 : d(z, x, y, m) S d(z, x, y', m) si $y' \supset y$
R4 : d(z, x, y, M) S d(z, x, y, M)
R5 : d(z, x, y, M°) S d(z, x, y, M)

R6 : d(z, x, y, M^*) et d(z, x, y, M) sont incomparables, comme le montrent ces deux exemples.

Exemple 1 :

R = {(a,c) , (b,d)}

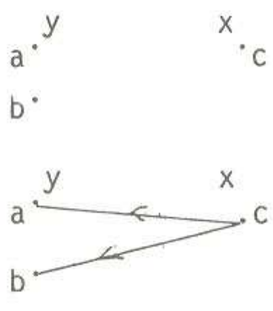


y M x donc y $\overline{M}$ x

x $\overline{M}$ y
y $\overline{M}$ x
} donc non y M^* x

Exemple 2 :

R = ∅



non y M x mais y $\overline{M}$ x

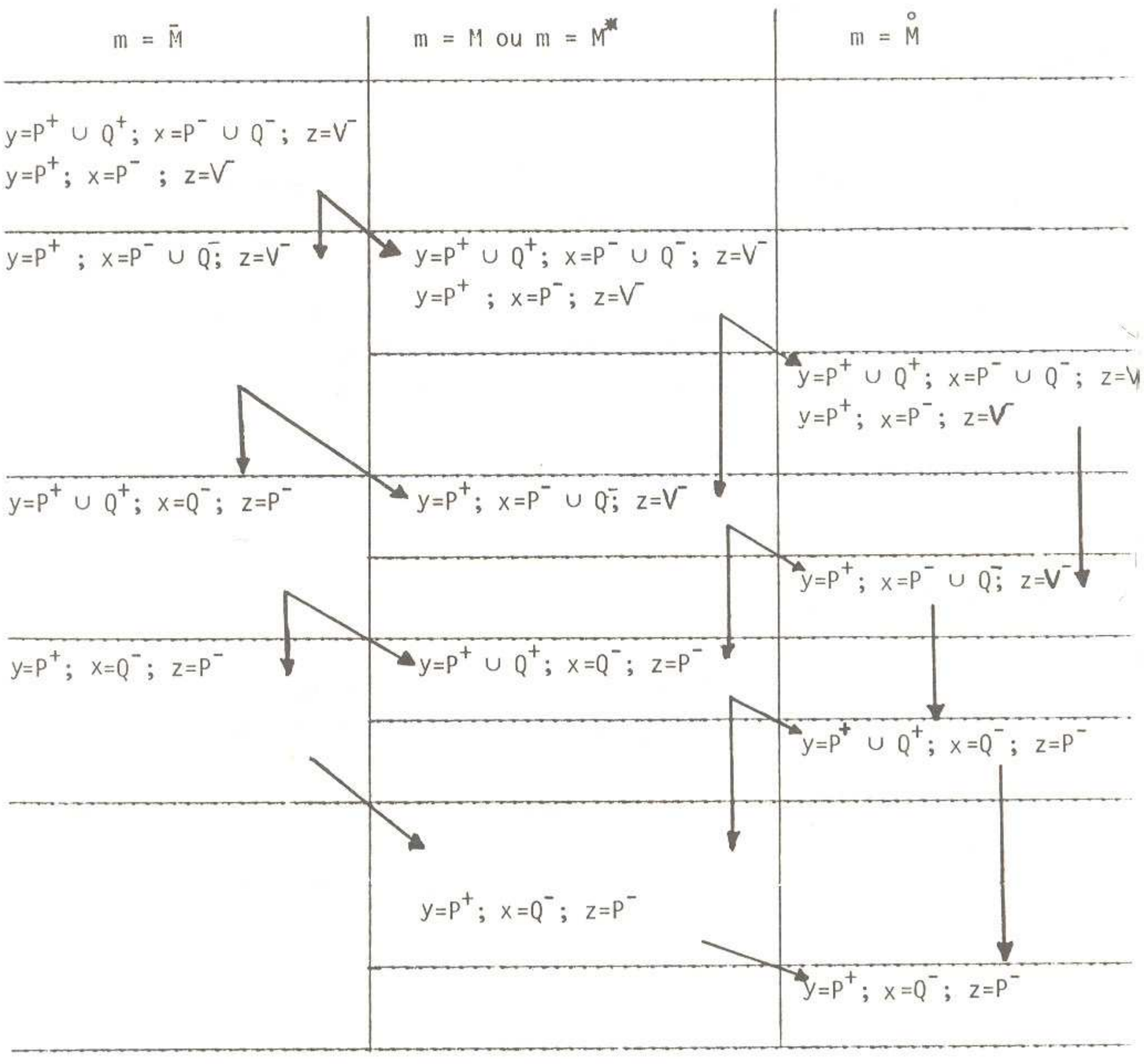
non x $\overline{M}$ y
y $\overline{M}$ x
} donc y M^* x

Remarque : On peut imposer une condition supplémentaire à D, c'est que $z \cap x = \emptyset$; par contre $z \cup x = W^-$ serait contraignante : on peut imaginer une relation de dominance qui n'imposerait pas le masque de I^-.

2.6. Choix du (des) masque(s)

Les choix des paramètres (x,y,z,m) du masquage ne peut être réalisé arbitrairement et constitue la partie la plus délicate de la méthode.

Nous proposons ci-dessous une liste de possibilités les plus réalistes parmi lesquelles on pourra choisir un ou préférentiellement deux jeux de paramètres conduisant à la construction de relations de surclassement faibles et fortes. Les relations sousjacentes sont classées par ordre de sévérité croissant dans le sens des flèches.



Par convention on supposera que $z = V^-$ correspond à des seuils de veto $v_j > s_j$.

Le choix de m est fortement lié à la relation R, en particulier l'expérience (cfr 3) montre que M°est mal adapté au cas où R contient un petit nombre de classes d'équivalence (2 ou 3).

2.7. PROPRIETES DE LA RELATION S

La relation de dominance S vérifie les propriétés suivantes :

1) cohérence avec la dominance Δ ($S \supset \Delta$)
2) monotonie ou Δ - transitivité ($B \Delta A + A S C \Rightarrow B S C$ et $B S A + A \Delta C \Rightarrow B S C$)
3) préservation de l'identité de chaque critère si $z U x = W^-$ (si $A E_j B$ pour tout $j \neq k$ alors $S = S_k$)

Démonstrations :

1) $A \Delta B \Rightarrow m_{W^-}(A,B) = \emptyset \Rightarrow m_x(A,B) = \emptyset$; $\forall x \Rightarrow ASB$
2) Découle directement de 1) et de la transitivité des masques car la condition de discordance ne peut jouer entre B et C si elle ne joue pas entre A et C
3) Vu $A E_j B$ pour tout $j \neq k$, le graphe biparti comporte un sommet au plus. Il faut éviter le cas $m_x(A,B) = \emptyset$ alors que $g_k(A) < g_k(B)$ pour ce faire, il faut $z U x = W^-$ (Dans le cas de deux masques $z U x_1 U x_2 = W^-$). Remarquons que la pseudo-dominance ne vérifie pas 3).

2.8. GENERALISATION DE ELECTRE IV

L'emploi du masque $\overline{M}$ généralise les définitions proposées par B. Roy lorsque $R = \emptyset$ et par conséquent ce choix conduit au graphe de surclassement construit par ELECTRE IV.
En effet, si $R = \emptyset$ alors la relation complémentaire produit un graphe biparti complet et l'existence d'un masque $\overline{M}$ se réduit à un problème de comptage c'est à dire à la condition $\# m_y (A,B) \geq \# m_x(A,B)$.

2.9. GENERALISATION DE LA RELATION R

Comme nous l'avons vu la relation R peut être une quelconque. En pratique R sera fourni par le décideur sous forme d'un(pré)-ordre total ou non. Il n'est cependant pas exclu d'utiliser une relation R composite quasi- ou pseudo-ordre et de combiner les deux types de relations d'ordre (sur les p.c. et sur les actions pour chaque p.c.) pour obtenir une famille plus complète de relations de surclassement. Ce procédé nécessite cependant une connaissance plus profonde du problème, équivalent quasi à la connaissance des taux de substitution entre les p.c.

3. EXEMPLE ILLUSTRATIF ET APPLICATION

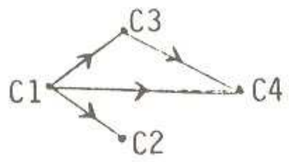
La méthode a été appliquée à un problème de comparaison de projets de réformes pédagogiques dans l'enseignement sur des données fournies par J.P. Dujardin de l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Liège.

Nous disposions d'une table de 8 projets jugés sur base de 7 critères ou moyen de scores attribués ou calculés par des experts.

Certains critères (coût, emploi) étaient numériques, d'autres (efficacité, facilité de mise en oeuvre, etc.) ordinaux. Les données exactes étant pour l'instant confidentielles, prenons un exemple fictif de 4 projets et 4 critères permettant surtout d'illustrer quelques implications des choix de paramètres.

	CRITERE 1 COUT(Min.)	CRITERE 2 EMPLOI (Max.)	CRITERE 3 EFFICACITE (Max.)	CRITERE 4 FACILITE (Max
PROJET 1	30	1.000	4	1
PROJET 2	450	420	4	4
PROJET 3	700	800	2	2
PROJET 4	720	500	5	5
Seuils q	50	50	0	0
s	100	100	1,5	1,5

Relation R : C1 plus important que C2, C3 et C4
C3 " " " C4



Relation de surclassement fort :

$m = M$; $x = P^+$; $y^- = Q^-$; $z = P^-$

Donc pour que A surclasse B, il faut :

- aucun critère pour lequel B est strictement préféré à A;
- les critères i pour lesquels B est faiblement préféré à A doivent être masqués par des critères j plus importants (jRi) pour lesquels A jouit d'une préférence stricte.

Relation de surclassement faible :

$m = \bar{M}$; $x = P^+ \cup Q^+$; $y = P^- \cup Q^-$; $z = \emptyset$

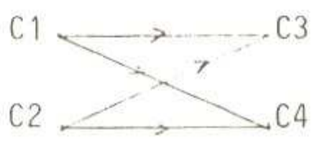
Donc pour dire que A surclasse B, il faut que les critères i pour lesquels B a un avantage soient "couverts" par des critères j du moins aussi importants (jRi ou $c\bar{R}j$) en faveur de A.

	Relations
PROJET 1/PROJET 2	
$P^+ = \{C1, C2\}$; $P^- = \{C4\}$	P1 S_f P2
PROJET 1/PROJET 3	
$P^+ = \{C1,C2,C3\}$; $Q^- = \{C4\}$	P1 S_F P3
PROJET 1/PROJET 4	
$P^+ = \{C1,C2\}$; $Q^- = \{C3\}$; $P^- = \{C4\}$	P1 S_f P4 (cf. 2)
PROJET 2/PROJET 3	
$P^+ = \{C1,C3,C4\}$ $P^- = \{C2\}$	P2 S_f P3
PROJET 2/PROJET 4	
$P^+ = \{C1\}$; $Q^- = \{C2,C3,C4\}$	- (cf. 3)
PROJET 3/PROJET 4	
$P^+ = \{C2\}$; $P^- = \{C3,C4\}$	P4 S_f P3 (cf. 4)

Notes

1) $Z = P^-$ empêche un surclassement fort de Pi par Pj (respectivement de Pj par Pi) lorsque $P^- \neq \emptyset$ (respectivement $P^+ \neq \emptyset$)

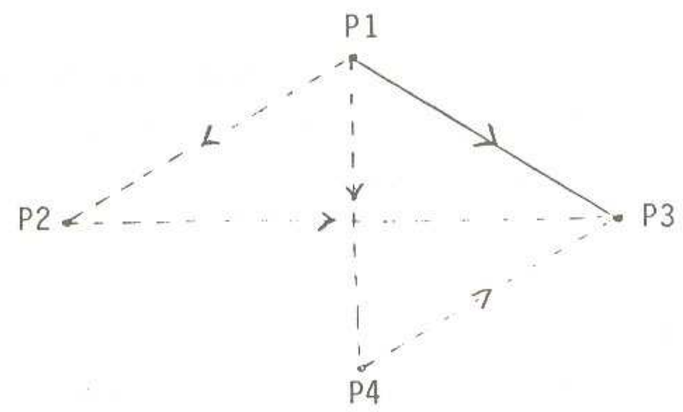
2) Grâce au choix $\bar{M}$ le graphe biparti est



3) Pas de surclassement car $\# m_x (P2,P4) < \# m_y (P2,P4)$ d'une part et $m_x (P4,P2) = \{C1\}$ n'est pas masqué d'autre part

4) Grâce au choix $\bar{M}$ le graphe biparti est

Le graphe de suclassement fort (—)/faible (---) associé est le suivant :



et donne le classement final P1 $\succ$ P2,P4 $\succ$ P3

ANNEXE

Le problème d'existence d'une bijection dans un graphe biparti est lié à celui des couvertures et on pourrait adopter un algorithme de recherche de type parcours d'arborescence. Cependant, la bijection en tant que telle ne nous interesse pas, seule son existence importe.
Nous donnons donc un théorème d'existence.

Théorème : La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une bijection entre $Y' \subset Y$ et X compatible avec U dans un graphe biparti G(X,Y,U) est que dans toute composante simplement connexe de G, soit (X^c, Y^c) on ait $\#P \leqslant \# U^{-1}P$ pour tout $P \in \mathcal{P}(X^c)$.

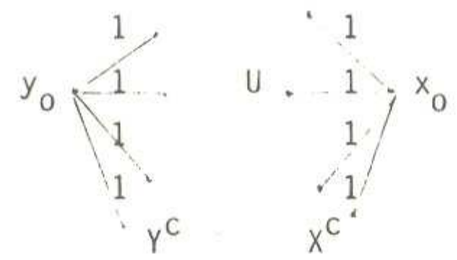
Dem. : CN : évidente

CS : omettons l'indice des composantes simplement connexes puisqu'il suffit de les attaquer séparément.

L'existence d'une bijection se ramène à l'existence d'un flot saturant les arcs menant à x_0 dans le graphe G'(Z,U') construit à partir de G tel que

$$Z = X \cup Y \cup \{x_0\} \cup \{y_0\}$$

$$U' = U \cup \bigcup_{i=1}^{\#x} (x_i, x_0) \cup \bigcup_{j=1}^{\#y} (y_0, y_j)$$



et dont tous les arcs ont une capacité de 1.
Il suffit de montrer en vertu du théorème max flow-min cut que toute coupe a une capacité $\geqslant \# X$.
Pour les coupes C, telles que $C \cap Y = \emptyset$ c'est vrai car alors la capacité vaut $\# \complement_X C + \# U^{-1}C \geqslant \# \complement_X C + \# C = \# X$.
Pour les coupes C, telles que $C \cap Y \neq \emptyset$ c'est vrai car la capacité vaut $\# \complement_X C + \# (C \cap Y) + \# (U^{-1}C / C) = \# \complement_X C + \# (C \cap Y) + \# U^{-1}C - \# (C \cap Y) \geqslant \# \complement_X X + \# C = \# X$ cqfd

Conséquences : comme # $\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$ la recherche est bornée, mais théoriquement le calcul peut être long si # X assez grand.
En pratique, cependant, on éliminera d'abord les sommets de X dont le degré intérieur est 1 ainsi que leurs précédents obligés. La répétition de ce procédé et la division du travail en composantes simplement connexes qui peuvent en résulter rendent la recherche beaucoup plus courte.

°
° °

REFERENCES

[1] B. ROY, *Extension de la notion de dominance, Bases théoriques et exemples d'application*, 12e journée du groupe de travail EURO "Aide à la décision multicritère" BOCHUM, oct. 80.

[2] M. ROUBENS, *Analyse et Agrégation des préférences : Modélisation et résumé des données rationnelles*, RBSTARO 20, 1980, Vol. 2, pp. 36-37.

[3] M. ROUBENS, *Agrégation des préférences en présence de préordres totaux sur l'ensemble des actions et d'une relation de type I,P,Q sur les points de vue*, 10e journée du groupe de travail EURO "Aide à la décision multicritère", LIEGE, oct. 79.

[4] J.H. PAELINCK, *QUALIFLEX : A flexible multiple-criteria method*. Economic letters 1 (1978), pp. 193-197.

[5] J.H. PAELINCK, *Qualitative multiple criteria analysis : An application to airport location*. Environment and planning A Vol 9 (1977), pp. 883-895.

[6] B. ROY et J.C. HUGONNARD, *Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne*, 14ème journée du groupe de travail EURO "Aide à la décision multicritère", Bruxelles, octobre 1981.

[7] T.L. SAATY, *A scaling Method for Priorities in Hierarchical Structure*, Journal of Mathematical Psychology 15, 1977 pages 234-281.

[8] B. ROY et J.C. HUGONNARD, *Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne*, (Présentation d'une méthode multicritère originale) C.C.E.R.O., 1982, Vol. 24 n°2-3-4, pages 153/173.

*
* *