

MEDIANE ET METHODES MULTICRITERES ORDINALES

Marc ROUBENS
 Faculté polytechnique de Mons

Abstract : The link between the median ranking method and some classical multiple criteria decision making procedures is shown. One way of coding the pseudo-preference and the incomparability is also expressed.

1. Introduction

En 1959, KEMENY [11] propose de résumer une famille $(B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, B_K)$ de préordres totaux d'un ensemble fini $X : \{a, b, c, \dots\}$ par une solution, dans l'ensemble des préordres totaux de X , de

$$\min_B \sum_k d(B, B_k)$$

où B est un préordre et d la distance de la différence symétrique,
 $d(A, B) = |A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|$. Un préordre optimal est appelé préordre médian ou médiane.

Dans les nombreuses études sur l'agrégation des opinions, le préordre médian joue un rôle central et ses liens avec la procédure Condorcet sont bien connus [2], [3], [9].

Jusqu'en 1978, aucun algorithme efficace n'a été proposé en vue de calculer une médiane relative à la famille $(B_1, B_2, \dots, B_K)$ (cf. [3] 4.4.1 pour les ordres médians).

A cette date, MARCOTORCHINO et MICHAUD comblent partiellement cette lacune en proposant une solution heuristique [13] qui, depuis, n'a pas été fondamentalement améliorée. Cette méthode repose sur la recherche de la solution du dual d'un programme linéaire (alors que le problème de base est un problème de programmation booléenne).

Dans les problèmes d'aide à la décision multicritère, les préordres totaux correspondent à des classements d'actions pour chacun des K critères. Si le poids p_k de chaque critère k est connu, il est intéressant de rechercher un préordre total B , exprimant un jugement global, solution de

$$\min_B \sum_k p_k d(B, B_k) .$$

On retrouve en fait cette préoccupation dans la méthode des permutations successives de JACQUET-LAGREZE décrite dans [5]. PAELINCK s'est inspiré de cette dernière méthode pour proposer, dans QUALIFLEX [14] de déterminer un ordre médian associé à chaque système de poids $\{p_k\}$, compatible avec un préordre total sur l'ensemble des critères.

Nous nous proposons de montrer les liens étroits existant entre différentes méthodes d'agrégation des préférences et la recherche d'une médiane d'un ensemble de préordres totaux. Nous suggérons en outre un codage de la préférence faible et de l'incomparabilité à l'aide d'une logique à 3 valeurs $(-1, 0, 1)$ qui respecte certains axiomes et permet d'étendre les notions introduites aux cas des pseudo-ordres et des structures partielles.

Pour une excellente synthèse des méthodes relatives à l'ajustement et au résumé de données relationnelles ainsi qu'aux procédures de recherche d'une médiane, nous renvoyons à BARTHELEMY et MONJARDET [3], [4].

2. Distance, adhésion et score

On suppose que les données brutes d'une analyse multicritère sont présentées sous forme d'échelles ou de notes n_{ik} (note de l'action i pour le critère k , note de l'objet i pour le jugement k , ...), $i \in X$, $k \in \{1, \dots, K\}$ et on leur associe K tableaux d'opinion en $(0, 1)$, M^k , tels que

$$\begin{aligned} M_{ij}^k &= 1 \text{ si } n_{ik} \geq n_{jk}, \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Les relations associées à ces tableaux d'opinion sont des préordres totaux $B_k = (P_k, I_k)$ où P_k représente la partie antisymétrique et I_k la partie symétrique de B_k . On note $(a I_k a, \forall a)$

$$\begin{cases} a P_k b \text{ ssi } M_{ab}^k = 1 \text{ et } M_{ba}^k = 0 \\ a I_k b \text{ ssi } M_{ab}^k = 1 \text{ et } M_{ba}^k = 1 \end{cases}$$

Soit $B = (P, I)$ un préordre total défini par le tableau M tel que

$$\begin{cases} a P b \text{ ssi } M_{ab} = 1 \text{ et } M_{ba} = 0 \\ a I b \text{ ssi } M_{ab} = 1 \text{ et } M_{ba} = 1 \end{cases}$$

Pour contrôler que B est un préordre total, il faut vérifier les conditions

$$\begin{cases} M_{ab} + M_{ba} \geq 1 \text{ (relation totale) , } \forall a, b \in X \\ M_{ab} + M_{bc} - M_{ac} \leq 1 \text{ (relation transitive), } \forall a, b, c \in X. \end{cases}$$

On définit la distance de la différence symétrique entre B et B_k comme

$$d(B, B_k) = \sum_i \sum_j |M_{ij} - M_{ij}^k|$$

Si on introduit les matrices $\bar{M}^k$ dont les éléments sont définis par $\bar{M}_{ij}^k = 2M_{ij}^k - 1$, on a :

$$\begin{cases} a P_k b \text{ ssi } \bar{M}_{ab}^k = 1 \text{ et } \bar{M}_{ba}^k = -1 \\ a I_k b \text{ ssi } \bar{M}_{ab}^k = 1 \text{ et } \bar{M}_{ba}^k = 1 \end{cases}$$

En définissant de même $\bar{M}_{ij} = 2M_{ij} - 1$, on obtient [13]

$$d(B, B_k) = \sum_i \sum_j |M_{ij} - M_{ij}^k| = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |\bar{M}_{ij} - \bar{M}_{ij}^k| = \sum_i \sum_j M_{ij}^k - \sum_i \sum_j \bar{M}_{ij}^k M_{ij} \quad (1)$$

$$= \sum_i \sum_j M_{ij} - \sum_i \sum_j M_{ij}^k \bar{M}_{ij} \quad (2)$$

$$= \sum_i \sum_j M_{ij} + \sum_i \sum_j M_{ij}^k - 2 \sum_i \sum_j M_{ij}^k M_{ij} \quad (3)$$

La part de la paire (a,b) à l'éloignement de B_k à B vaut :

$$|M_{ab} - \bar{M}_{ab}^k| + |M_{ba} - \bar{M}_{ba}^k| = \frac{1}{2} |\bar{M}_{ab} - \bar{M}_{ab}^k| + \frac{1}{2} |\bar{M}_{ab} - \bar{M}_{ab}^k|$$

c'est-à-dire, avec la notation $a \bar{P}_k b$ ssi $b P_k a$,

	$a P_b$	$a I_b$	$a \bar{P}_b$
$a P_k b$	0	1	2
$a I_k b$	1	0	1
$a \bar{P}_k b$	2	1	0

Dans le cas où B_k sont des ordres totaux et B un ordre total "global"

$$(\sum_i \sum_j M_{ij}^k - \bar{M}_{ij}^k = \sum_i \sum_j \bar{M}_{ij}^k - M_{ij}^k) \text{ représente l'adhésion de } B_k \text{ à B. [5]}$$

En bref, la part de l'adhésion pour le couple (a,b) vaut

	$a P_b$	$a \bar{P}_b$
$a P_k b$	1	-1
$a \bar{P}_k b$	-1	1

Partant d'ordres totaux $B_k = P_k$, pondérés par les poids p_k , l'adhésion générale à un ordre total $B=P$ est donnée par

$$\sum_i \sum_j [\sum_k p_k \bar{M}_{ij}^k] M_{ij} = \sum_i \sum_j [\sum_k p_k M_{ij}^k] \bar{M}_{ij}$$

Une notion fort proche de l'adhésion générale est définie dans le cas où B_k représentent des préordres totaux (P_k, I_k) et B un ordre total P par PAELINCK sous le nom de "ranking score"[14]. Il propose de considérer le score de la paire (a,b) comme

$$M_{ab}^k \bar{M}_{ab} + M_{ba}^k \bar{M}_{ba}, \text{ c'est-à-dire :}$$

	aPb	$a\bar{P}b$
$a P_k b$	1	-1
$a I_k b$	0	0
$a \bar{P}_k b$	-1	1

On appelle donc *adhésion générale* ou *score global* des préordres totaux $B_k : (P_k, I_k)$ pondérés par p_k à l'ordre total P , l'expression

$$\sum_i \sum_j [\sum_k p_k M_{ij}^k] \bar{M}_{ij}$$

3. Méthode de permutations successives de Jacquet-Lagrange

Partant de K relations d'ordre pondérées par les poids p_k , JACQUET-LAGREZE propose d'agréger ces relations d'ordre en une relation d'ordre globale en considérant toutes les relations d'ordre de X (les permutations de tous les objets de X) et en calculant pour chacune d'entre elles, l'adhésion générale. On retient l'ordre total global P (pas nécessairement unique) qui maximise l'adhésion générale.

On constate qu'il s'agit en fait de résoudre le problème de la recherche de l'ordre médian relatif aux ordres totaux $(P_1, \dots, P_k)$. En effet, en vertu de la relation (1)

$$\min_{P, k} \sum p_k d(P, P_k) \leftrightarrow \max_{M_{ij}} \sum_i \sum_j [\sum_k p_k \bar{M}_{ij}^k] M_{ij}$$

Pour résoudre le problème posé par JACQUET-LAGREZE, il suffit de résoudre le programme linéaire en variables booléennes :

$$\max_{M_{ij}} \sum_i \sum_j [\sum_k p_k \bar{M}_{ij}^k] M_{ij}$$

$$\begin{cases} M_{ij} \in \{0, 1\} \\ M_{ij} + M_{ji} = 1, \forall i \neq j \in X \text{ (relation complète et antisymétrique)} \\ M_{ij} + M_{jk} - M_{ik} \leq 1, \forall i, j, k \in X \text{ (relation transitive)} \end{cases}$$

4. Méthode qualiflex de Paelinck

On suppose connu un préordre total sur l'ensemble des critères qui permet de considérer les systèmes de poids compatibles avec ce préordre, c'est-à-dire un système $\{p_k\}$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_k p_k = 1, \\ p_k \geq p_{k+1}, \quad k=1, \dots, K-1, \end{cases}$$

si les critères sont rangés selon l'ordre décroissant des importances.

Pour chaque système de poids compatibles, PAELINCK propose de déterminer un ordre total présentant le score global le plus important.

Comme $\sum_i \sum_j M_{ij} = \frac{N(N+1)}{2}$, si $N = \text{card.} X$ (M est la matrice d'opinion d'un ordre total P), on a, en vertu de (3),

$$\begin{aligned} \min_{\substack{P \\ \text{ordres} \\ \text{totaux}}} \sum_k p_k d(P, B_K) &\leftrightarrow \max_{M_{ij}} \sum_i \sum_j \left[\sum_k p_k M_{ij}^k \right] M_{ij} \text{ où } M_k \text{ représentent les matrices d'opinion} \\ &\text{données et } M \text{ est la matrice d'opinion relative à l'ordre total} \\ &\text{cherché} \end{aligned}$$

Ce problème est équivalent à la résolution du programme booléen

$$(PB1) : \max_{M_{ij}} \sum_i \sum_j \left[\sum_k p_k M_{ij}^k \right] M_{ij}$$

$$\begin{cases} M_{ij} \in \{0, 1\} \\ M_{ij} + M_{ji} = 1, \quad \forall i \neq j \in X, \\ M_{ij} + M_{jk} - M_{ik} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in X \end{cases}$$

PAELINCK résout ces problèmes par énumération explicite, en balayant l'espace des poids compatibles avec le préordre total établi sur les critères. Il montre [14] que ce balayage peut être discrétisé en recherchant les ordres médians correspondant aux K systèmes de poids :

p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k
1	0	0		0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0
$\vdots$				
$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$		$\frac{1}{K}$

A partir de ces points, de nouveaux points (dont les coordonnées sont des combinaisons linéaires des précédents) sont à explorer ou non selon que l'on obtient ou non des ordres médians différents en les points initiaux.

On peut reprocher à cette méthode de négliger les préordres ou les quasi-ordres totaux. Des aménagements mineurs permettent cependant de pallier cet inconvénient.

En effet, si on souhaite déterminer un préordre médian, il suffit de résoudre le programme booléen

$$(PB2) : \text{MAX} \sum_i \sum_j [\sum_k p_k \bar{M}_{ij}^k] M_{ij}$$

$$\begin{cases} M_{ij} + M_{ji} \geq 1, \forall i \neq j \in X \\ M_{ij} + M_{jk} - M_{ik} \leq 1, \forall i, j, k \in X \\ M_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in X \end{cases}$$

Si l'on souhaite obtenir un quasi-ordre médian, la seconde contrainte est remplacée par les contraintes (cf. [15]).

$$\begin{cases} S_{ij} + S_{jk} + M_{kl} + A_{li} \leq 4, & \forall i,j,k,l \in X \text{ (PIP)} \\ A_{ij} + A_{jk} + S_{kl} + S_{li} \leq 5, & \forall i,j,k,l \in X \text{ (P}^2\text{II}^2=\emptyset) \end{cases}$$

si $S = M + M'$ (M' transposée de M) et $A = M - M'$.

5. Méthodes de recherche de préordres totaux

La recherche d'une médiane relative à un ensemble de préordres totaux a été présentée à de nombreuses reprises comme un problème de programmation en variables 0-1, notamment par DE CANI [8], BOWMAN et COLANTONI [6], HUBERT et SCHULTZ [10]. Des techniques "Branch-and-Bound" adaptées à la structure particulière du problème sont proposées par COOK et SAIPE [7], LEMAIRE [12], ARMSTRONG et COOK [1].

MICHAUD et MARCOTORCHINO [13] utilisent le dual du programme linéaire construit à partir de programmes booléens en relaxant les contraintes $M_{ij} \in \{0,1\}$ au profit de contraintes $0 \leq M_{ij} \leq 1$.

De nombreux essais effectués notamment sur des programmes proches de (PB1) montrent que la solution obtenue est du type zéro-un. On peut cependant mettre en doute le caractère d'unimodularité de la matrice des contraintes associées au dual et il faut dès lors considérer cette méthode comme une heuristique. En outre, comme on l'a déjà signalé par ailleurs [4], cette technique ne livre qu'une seule solution et l'on sait que le classement médian n'est pas nécessairement unique.

6. Codage de la préférence faible et de l'incomparabilité

Lors de la recherche de préordres médians, deux codages ont été proposés :

$$\begin{cases} aP(P_k)b \text{ ssi } M_{ab}(M_{ab}^k) = 1, M_{ba}(M_{ba}^k) = 0 \\ aI(I_k)b \text{ ssi } M_{ab}(M_{ab}^k) = 1, M_{ba}(M_{ba}^k) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} aP(P_k)b \text{ ssi } \bar{M}_{ab}(\bar{M}_{ab}^k) = 1, \bar{M}_{ba}(\bar{M}_{ba}^k) = -1 \\ aI(I_k)b \text{ ssi } \bar{M}_{ab}(\bar{M}_{ab}^k) = 1, \bar{M}_{ba}(\bar{M}_{ba}^k) = 1 \end{cases}$$

Dans la suite, on notera brièvement les codifications P : (1,0) ou (1,-1) et I : (1,1).

Ces codages conduisent à la définition de

$$d(B, B_k) = \sum_i \sum_j |M_{ij} - M_{ij}^k| = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |\bar{M}_{ij} - \bar{M}_{ij}^k|$$

Si on souhaite étendre les résultats obtenus aux cas des relations partielles par l'introduction de l'incomparabilité R (voir[17]) et des pseudo-ordres par l'adjonction d'une préférence faible Q (voir[18]), on est confronté au codage de Q et R.

En notant $d(B, B_k) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |\bar{N}_{ij} - \bar{N}_{ij}^k|$, on recherche une matrice d'opinion

$\bar{N}$ basée sur une logique à 3 valeurs (1,0,-1) telle que

$$(\bar{M}_{ab} = \bar{N}_{ab}, \bar{M}_{ba} = \bar{N}_{ba}) \text{ si } aPb \text{ ou } aIb$$

et que la contribution de la paire (a,b) à l'éloignement de B_k à B (défini par $e_{ab} = \frac{1}{2} |\bar{N}_{ab} - \bar{N}_{ab}^k| + \frac{1}{2} |\bar{N}_{ba} - \bar{N}_{ba}^k|$), satisfasse aux axiomes définis plus loin.

Considérons le tableau symétrique des contributions de la paire (a,b)
à l'éloignement de B_k à B dans les différents cas de figure (l'indice ab est omis):

	aPb	aP̄b	aQb	aQ̄b	aIb	aRb
aP _k b	0	2	$e(P_k Q)$	$e(P_k \bar{Q})$	1	$e(P_k R)$
aP̄ _k b		0	$e(\bar{P}_k Q)$	$e(\bar{P}_k \bar{Q})$	1	$e(\bar{P}_k R)$
aQ _k b			0	$e(Q_k \bar{Q})$	$e(Q_k I)$	$e(Q_k R)$
aQ̄ _k b				0	$e(\bar{Q}_k I)$	$e(\bar{Q}_k R)$
aI _k b					0	$e(I_k R)$
aR _k b						0

Il semble naturel d'introduire les axiomes suivants relatifs à Q et

R :

- a1) $e(P_k Q) = e(\bar{P}_k \bar{Q})$
- a2) $e(P_k \bar{Q}) = e(\bar{P}_k Q)$
- a3) $e(P_k \bar{P}) > e(P_k \bar{Q}) > e(Q_k \bar{Q})$
- a4) $e(P_k I) > e(Q_k I)$
- a5) $e(P_k R) > e(Q_k R)$

Partant de $P(P_k) : (1, -1) \rightarrow \bar{P}(\bar{P}_k) : (-1, 1)$

$I(I_k) : (1, 1)$

on recherche parmi les codifications possibles pour $Q(Q_k) : (1,0)$ ou $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ et $R(R_k) : (0,0)$ ou $(-1,-1)$ celle(s) qui satisfait(ont) aux axiomes a1) à a5).

On montre le résultat suivant :

Si $P(P_k) : (1,-1)$ et $I(I_k) : (1,1)$, le seul codage qui satisfasse les axiomes a1) à a5) est donné par

$$Q(Q_k) : (1,0), R(R_k) : (0,0)$$

$$\begin{aligned} \text{Il en découle que } e(P_k I) &= e(P_k R) \\ e(Q_k I) &= e(Q_k R) \end{aligned}$$

En effet :

a) parmi les 4 codages de $Q(Q_k) : (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ seul $(1,0)$ satisfait aux axiomes a1) à a4).

$Q(Q_k) : (0,1)$ est tel que $\overline{Q}(\overline{Q}_k) : (1,0)$ et a3) est violé car $e(P_k \overline{Q}) < e(Q_k \overline{Q})$, $(1/2 < 1)$.

$Q(Q_k) : (-1,0)$ viole également l'axiome a3).

$Q(Q_k) : (0,-1)$ viole l'axiome a4) car $e(P_k I) < e(Q_k I)$, $(1 < \frac{3}{2})$.

b) après avoir retenu $Q(Q_k) : (1,0)$, considérons $R(R_k) : (y,y)$, $y \in \{(0,-1)\}$. Seul, le codage $(0,0)$ satisfait a5). En effet si $R(R_k) : (-1,-1)$, l'axiome a5) est violé car $e(Q_k R) > e(P_k R)$, $(3/2 > 1)$.

En résumé, le codage

	$\bar{N}_{ab}$	$\bar{N}_{ba}$
aPb	1	-1
a $\bar{P}$ b	-1	1
aQb	1	0
a $\bar{Q}$ b	0	1
aIb	1	1
aRb	0	0

conduit aux contributions suivantes : e_{ab}

	aPb	a $\bar{P}$ b	aQb	a $\bar{Q}$ b	aIb	aRb
aP _k b	0	2	1/2	3/2	1	1
a $\bar{P}$ _k b		0	3/2	1/2	1	1
aQ _k b			0	1	1/2	1/2
a $\bar{Q}$ _k b				0	1/2	1/2
aI _k b					0	1
aR _k b						0

Il est intéressant de noter que si on retient la codification P : (1,0), I : (1,1), le codage équivalent à celui qui vient d'être défini vaut Q : (1, $\frac{1}{2}$), R : ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$). Il conduit aux mêmes contributions.

7. Bibliographie

- [1] R.D. ARMSTRONG, W.D. COOK,
"A comittee ranking problem using ordinal utilities"
Revue Belge de Stat., Info. et R.O. 21 (1981) 3-23
- [2] K.J. ARROW,
"Social Choice and Individual Values"
(Wiley, New-York, 2nd. ed. 1962).
- [3] J.P. BARTHELEMY, B. MONJARDET,
"Ajustement et résumé de données relationnelles : les relations centrales"
in Data Analysis and Informatics, E. Diday et al. (eds), North Holland,
(1980); 645-653.
- [4] J.P. BARTHELEMY, B. MONJARDET,
"The median procedure in cluster analysis and social science theory"
Mathematical Social Sciences 1 (1981) 235-267.
- [5] G. BERNARD, M.L. BESSON,
"Douze méthodes d'analyse multicritère"
E.I.R.O., V-3 (1971) 19-66.
- [6] V.J. BOWMAN, C.S. COLANTONI,
"Majority rule under transitivity constraints"
Management Science 19 (1973) 1029-1041.
- [7] W.D. COOK, A.L. SAIPE,
"Committee approach to priority planning : the median ranking method"
Cahiers du C.E.R.O. 18 (1976) 337-351.
- [8] J.S. DE CANI,
"A branch and bounded algorithm for maximum likelihood paired comparison
ranking"
Biometrika 59 (1972) 131-135.
- [9] G. TH. GUILBAUD,
"Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation"
Economie Appliquée, 15, (1952) repris dans Eléments de la Théorie des Jeux
(Dunod, Paris, 1968).
- [10] L. HUBERT, J. SCHULTZ,
"Maximum likelihood paired comparison ranking and quadratic assignment"
Biometrika 62 (1975) 655-659.
- [11] J.C. KEMENY,
"Mathematics without numbers"
Daedalus, 88 (1959) 577-591.

- [12] J. LEMAIRE,
"Agrégation typologique des données de préférence"
Math. Sci. Hum. 58 (1977) 31-50.
- [13] F. MARCOTORCHINO, P. MICHAUD,
"Modèles d'optimisation en analyse des données relationnelles"
Math. Sci. Hum. 67 (1979) 7-38.
- [14] J.H.P. PAELINCK,
"Qualitative multiple criteria analysis, environmental protection and
multiregional development"
Papers of the Regional Science Association 36 (1976) 59-74.
- [15] M. ROUBENS,
"Analyse et agrégation des préférences : modélisation, ajustement et résumé
de données relationnelles"
Revue Belge de Stat., d'Info. et de R.O. 20 (1980) 36-67.
- [16] M. ROUBENS,
"Preference Relations on Actions and Criteria in MCDM"
European Journal of Operational Research 10 (1982)
- [17] M. ROUBENS, Ph. VINCKE,
"On partial interval orders"
to appear.
- [18] Ph. VINCKE,
"Vrais, quasi, pseudo et précritères sur un ensemble fini : propriétés et
algorithmes"
Cahiers du LAMSADE (27), Université de Paris-Dauphine, 1980.