

SUR LA PRECISION DES MESURES DE LA RADIOACTIVITE D'UN CORPS

par R. SNEYERS

Institut royal météorologique de Belgique

1. Introduction.

Dans le cadre de contacts établis au sein du groupe d'experts-techniciens désignés par les autorités compétentes des pays membres d'Euratom pour étudier le problème de la comparaison des appareils de mesure de la radioactivité atmosphérique (projet Grandjean) et en marge de la campagne de comparaisons entreprise par l'Institut royal météorologique, G. Ballot ⁽¹⁾ a fait à l'I.R.M., le 29 novembre 1963, un exposé sur les méthodes statistiques appliquées aux problèmes de la mesure de la radioactivité d'un corps, et à cette occasion il a présenté un abaque universel permettant d'établir rapidement les conditions expérimentales requises pour effectuer des mesures avec une précision donnée d'avance.

Au cours de la discussion qui a suivi cet exposé, ce problème a encore été réexaminé sous ses divers aspects et C. Levert ⁽²⁾ a décrit un nomogramme destiné aux mêmes usages, mais d'une forme différente.

Nous avons tenté, dans ce qui suit, de faire le point sur ce sujet à la lumière des échanges d'idées qui ont animé cette réunion et de caractériser l'abaque et le nomogramme cités afin de rendre plus aisé le choix qui s'offre ainsi aux utilisateurs éventuels.

Accessoirement, signalons que la théorie développée dans ce qui suit est applicable à toute mesure expérimentale effectuée au moyen d'un comptage d'impulsions, pour autant que la loi de distribution du nombre d'impulsions par unité de temps obéit à une loi de Poisson.

2. Généralités.

On sait que la radioactivité d'un corps se manifeste par l'émission de particules et d'un rayonnement électromagnétique provoqués par la désintégration de ses atomes. Aussi, pour mesurer la radioactivité d'un corps compte-t-on au moyen d'instruments appropriés les particules émises par ce corps et la

⁽¹⁾ Ingénieur au Service de Contrôle des Radiations et de Génie Radioactif. Commissariat à l'Energie Atomique, Saclay, France.

⁽²⁾ Climatologiste, Kon. Ned. Met. Inst., De Bilt.

mesure finale s'obtient en appliquant au nombre enregistré, diminué du bruit de fond, un facteur préalablement déterminé par étalonnage.

On voit de cette manière que la mesure de la radioactivité d'un corps est affectée de deux sortes d'erreurs, l'une qui provient de l'imprécision du facteur de réduction et qu'on peut considérer comme systématique, et l'autre, à caractère aléatoire, qui est liée à l'irrégularité des désintégrations. C'est de cette dernière erreur qu'il sera question ici.

Comme dans un corps homogène la probabilité de désintégration d'un atome, qui est la même pour tous les atomes, est très faible, on peut prévoir que le nombre de particules enregistrées en provenance du corps radioactif dans un intervalle de temps donné sera régi par une loi de Poisson. De plus, le bruit de fond possédant des propriétés aléatoires identiques, il en résulte que le comptage brut (radioactivité du corps augmenté du bruit de fond) sera lui aussi régi par une loi de Poisson, en vertu du principe d'additivité des variables obéissant à une telle loi (cf [1], p. 724).

Cela étant, si x_0 est le comptage brut obtenu au cours d'un intervalle de temps t_0 donné et si p_{x_0} est la probabilité d'obtenir dans cet intervalle de temps ce comptage x_0 , on a :

$$p_{x_0} = \frac{\xi_0^{x_0} e^{-\xi_0}}{\Gamma(x_0 + 1)}, \quad (1)$$

sachant que ξ_0 est l'espérance mathématique de x_0 , c'est-à-dire que :

$$E(x_0) = \sum_{x_0=0}^{\infty} x_0 p_{x_0} = \xi_0. \quad (2)$$

En d'autres termes, le paramètre ξ_0 n'est autre que la valeur moyenne vers laquelle on se rapprocherait de plus en plus si l'on pouvait répéter indéfiniment le comptage dans des intervalles de temps tous égaux à t_0 .

Dans ces conditions, si $\gamma_0 = \xi_0/t_0$ est l'activité décelée au détecteur et si, en particulier, $\gamma_1 = \xi_1/t_1$ et $\gamma_2 = \xi_2/t_2$ sont respectivement l'activité du bruit de fond et celle du corps radioactif associé au bruit de fond, les problèmes qui se posent sont ceux de l'estimation et de la précision des activités γ_0 , γ_1 et γ_2 ainsi que de celle de l'activité pure γ du corps définie par la relation :

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad (3)$$

en supposant que l'erreur commise sur t_0 , t_1 et t_2 ne doive pas être prise en considération.

3. De l'estimation des activités brutes.

En vertu de la définition de l'activité γ_0 , ce problème se ramène à l'estimation du paramètre ξ_0 de la loi de Poisson correspondante et la solution la plus simple consiste à noter que l'équation de vraisemblance :

$$\frac{\partial \log p_{x_0}}{\partial \xi_0} = 0, \quad (4)$$

conduit ici à l'estimateur $\hat{\xi}_0 = x_0$ pour lequel on a évidemment :

$$E(\hat{\xi}_0) = \xi_0 \quad \text{et} \quad \text{var } \hat{\xi}_0 = \xi_0.$$

Il en résulte qu'en vertu des propriétés asymptotiques de la loi de Poisson, lorsque ξ_0 est suffisamment grand, on peut construire pour ξ_0 l'intervalle de confiance $(\underline{\xi}_0, \overline{\xi}_0)$ pour le coefficient $P = 1 - 2\alpha > 0$, avec :

$$\underline{\xi}_0 = x_0 - t_\alpha \sqrt{x_0} \quad \text{et} \quad \overline{\xi}_0 = x_0 + t_\alpha \sqrt{x_0}, \quad (5)$$

sachant que t_α est la valeur de la variable normale réduite t pour laquelle on a $\alpha = \text{Prob}(t \geq t_\alpha)$.

En particulier, pour $t_\alpha = 1, 2, 3$, on trouve les coefficients $P_1 = 0,6827$, $P_2 = 0,9545$ et $P_3 = 0,9973$, tandis que pour $P = 0,95$ et $P = 0,998$, on a : $t_\alpha = 1,96$ et $t_\alpha = 3,090$.

Par contre, lorsque ξ_0 n'est pas très grand, il convient de faire appel aux valeurs correctes des limites fiduciaires $\underline{\xi}_0$ et $\overline{\xi}_0$, qui s'expriment au moyen de la variable χ^2 (cf [1], p. 722) suivant :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_0 &= \frac{1}{2} \chi_a^2, & \text{pour } \nu = 2x_0 \text{ degrés de liberté,} \\ \text{et } \overline{\xi}_0 &= \frac{1}{2} \chi_{1-a}^2, & \text{pour } \nu = 2(x_0 + 1) \text{ degrés de liberté,} \end{aligned} \quad (6)$$

avec $\alpha = \int_0^{\chi_a^2} f(\chi^2) d\chi^2$, où $f(\chi^2)$ désigne la densité de probabilité de χ^2 , ce qui permet aussi d'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_0 &= u_\alpha \sqrt{x_0}, & \text{avec } I(u_\alpha, x_0 - 1) &= \alpha \\ \overline{\xi}_0 &= u_{1-\alpha} \sqrt{x_0 + 1}, & \text{avec } I(u_{1-\alpha}, x_0) &= 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

en utilisant la fonction gamma-incomplète :

$$I(u, p) = \int_0^{u\sqrt{p+1}} \frac{v^p e^{-v}}{\Gamma(p+1)} dv. \quad (8)$$

Il s'ensuit que pour $x_0 < 49$ et des valeurs particulières de α , on pourra se référer aux Tables de Hald (cf [3] pp. 40-43) et pour $x_0 < 50$ et toutes les valeurs de α , on pourra utiliser les tables de Pearson [4].

On peut en déduire également d'autres formules approchées pour ξ_0 et $\bar{\xi}_0$. En effet, si on note que la variable $v = u\sqrt{p+1}$ dans la distribution gamma-incomplète se confond asymptotiquement avec une variable normale de moyenne et de variance égales à $(p+1)$, il en résulte qu'on a aussi :

$$\xi_0 = x_0 - t_\alpha \sqrt{x_0} \quad \text{et} \quad \bar{\xi}_0 = (x_0 + 1) + t_\alpha \sqrt{x_0 + 1}. \quad (9)$$

Enfin, si l'on considère avec Hald (cf [1] p. 258) la formule approchée de χ^2 donnée par Wilson et Hilferty [5], il convient de retenir encore les formules :

$$\xi_0 = x_0 \left(1 - \frac{1}{9x_0} - \frac{t_\alpha}{3} \sqrt{\frac{1}{x_0}} \right)^3$$

et

$$\bar{\xi}_0 = (x_0 + 1) \left(1 - \frac{1}{9(x_0 + 1)} + \frac{t_\alpha}{3} \sqrt{\frac{1}{x_0 + 1}} \right)^3. \quad (10)$$

Comme dans la pratique on pourra, pour des raisons de simplicité, préférer l'emploi de l'une des formules approchées (5), (9) ou (10) à celui des relations exactes (6) ou (7), il est utile de connaître l'importance de l'erreur que l'on accepte de cette manière. A cet effet nous avons calculé à l'aide des tables de la fonction gamma-incomplète les coefficients P attachés aux intervalles de confiance obtenus en faisant dans ces formules $t_\alpha = 1, 2, 3$ afin de pouvoir les comparer avec les coefficients P_i ($i = 1, 2, 3$) attendus, et ce pour la valeur relativement faible $x_0 = 30$.

Les valeurs ainsi obtenues (tableau I) montrent que la formule (5) donne les résultats les moins bons, tandis que les formules (9) et (10) fournissent des valeurs de P très voisines des coefficients P_i correspondants, les dernières valeurs s'en approchant le mieux. Il convient d'ajouter que les nombres ξ_0 et $\bar{\xi}_0$ déduits de la dernière formule se confondent pratiquement avec les valeurs exactes tandis que ceux calculés à partir des formules (5) et

TABLEAU I

Coefficients P associés aux intervalles de confiance (5), (9) et (10)
pour $x_0 = 30$ et $t_a = 1, 2, 3$

$i = t_a$	1	2	3
P_i	.6827	.9545	.9973
Intervalle (5)	.6380	.9414	.9931
Intervalle (9)	.6848	.9561	.9958
Intervalle (10)	.6816	.9543	.9973

(9) sont systématiquement trop faibles. Il s'ensuit qu'un test de signification basé sur ces dernières formules serait biaisé puisqu'il favoriserait les faibles valeurs au détriment des valeurs élevées.

Il est cependant facile d'éviter cet inconvénient.

Pour la formule (5), il est clair, en effet, que la cause principale du biais provient de ce que dans l'expression qui donne $\bar{\xi}_0$, on trouve x_0 au lieu de $(x_0 + 1)$; pour l'éliminer il suffit donc d'augmenter $\bar{\xi}_0$ d'une unité.

Pour la formule (9), on notera que si on pose $\varepsilon = \sqrt{1/x_0}$ et si l'on écrit t pour t_a , la fonction de Wilson et Hilferty devient :

$$f(\varepsilon) = x_0 \left(1 + \frac{t\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{9} \right)^3,$$

ce qui, en développant et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3, conduit à :

$$f(\varepsilon) = x_0 \left(1 + t\varepsilon + \frac{t^2 - 1}{3} \varepsilon^2 \right) = x_0 (1 + t\varepsilon) + \frac{t^2 - 1}{3}, \quad (11)$$

c'est-à-dire, qu'en première approximation l'écart entre les valeurs données par les formules (9) et (10) est constant et égal à $(t^2 - 1)/3$.

En particulier, pour $t = 1, 2, 3$, la correction à appliquer aux formules (9) est respectivement égale à 0, 1 et 2,7. On voit donc que moyennant les remarques qui viennent d'être faites, l'approximation normale est parfaitement utilisable, même pour de faibles valeurs de x_0 .

4. De l'estimation des activités pures.

Si x_1 et x_2 sont les résultats des comptages donnés par le bruit de fond et par le corps radioactif associé au bruit de fond pendant les durées respectives t_1 et t_2 , les estimations des activités γ_1 et γ_2 correspondantes seront :

$$\hat{\gamma}_1 = C_1 = x_1 / t_1 \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_2 = C_2 = x_2 / t_2,$$

tandis que l'estimation de l'activité pure γ du corps radioactif sera donnée par la relation :

$$\hat{\gamma} = C = C_2 - C_1.$$

Il s'ensuit que, les variables x_1 et x_2 étant indépendantes et les durées t_1 et t_2 , supposées connues sans erreur, on a :

$$\text{var } C = \text{var } C_2 + \text{var } C_1 = \frac{\text{var } x_2}{t_2^2} + \frac{\text{var } x_1}{t_1^2}.$$

Comme on a d'autre part :

$$E(x_1) = \text{var } x_1 = \xi_1, \quad E(x_2) = \text{var } x_2 = \xi_2,$$

$$\gamma_1 = \xi_1 / t_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \xi_2 / t_2,$$

il vient :

$$\text{var } C = \frac{\xi_1}{t_1^2} + \frac{\xi_2}{t_2^2} = \frac{\gamma_1}{t_1} + \frac{\gamma_2}{t_2}, \quad (12)$$

ce qui conduit à :

$$\hat{\text{var}} C = \frac{C_1}{t_1} + \frac{C_2}{t_2}, \quad (13)$$

en même temps que :

$$\text{var } \hat{\text{var}} C = \frac{\xi_1}{t_1^4} + \frac{\xi_2}{t_2^4} = \frac{\gamma_1}{t_1^3} + \frac{\gamma_2}{t_2^3}. \quad (14)$$

On en déduit immédiatement que les estimations $\hat{\gamma}$ et $\hat{\text{var}} C$ deviennent très rapidement meilleures avec des durées t_1 et t_2 plus longues et qu'en outre, si l'on fixe t_2 et si γ_1 est petit par rapport à γ_2 , des valeurs de plus en plus grandes de t_1 n'apporteront que des réductions négligeables de $\text{var } C$ dès que γ_1 / t_1 est suffisamment petit en regard de γ_2 / t_2 . On voit donc qu'il peut y avoir avantage à déterminer un choix optimal des durées t_1 et t_2 de mesure.

Cela étant, montrons que si on pose $T = t_1 + t_2$, les valeurs de t_1 et de t_2 qui rendent T minimale pour une valeur de $\text{var } C$ donnée ou qui rendent $\text{var } C$ minimale pour une valeur de T donnée, obéissent à la même relation.

En effet, si l'on écrit :

$$f(t_1, T) = \frac{\gamma_1}{t_1} + \frac{\gamma_2}{T - t_1}, \quad (15)$$

la réponse à la deuxième question est donnée par l'équation (cf [6] p. 302) :

$$\frac{df}{dt_1} = -\frac{\gamma_1}{t_1^2} + \frac{\gamma_2}{(T - t_1)^2} = 0, \quad (16)$$

qui donne :

$$t_2/t_1 = \sqrt{\gamma_2/\gamma_1} = \sqrt{R} > 1, \quad (17)$$

avec la condition :

$$\frac{d^2 f}{dt_1^2} = 2\gamma_1 t_1^{-3} + 2\gamma_2 t_2^{-3} > 0, \quad (18)$$

qui est effectivement vérifiée pour $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$.

Dans le premier cas, si k désigne une constante, on a :

$$f(t_1, T) = k, \quad (19)$$

et la propriété résulte de ce que les valeurs de

$$\frac{dT}{dt_1} \text{ et de } \left(\frac{d^2 T}{dt_1^2} \right) \frac{dT}{dt_1} = 0$$

que l'on déduit de l'équation (19) en calculant les dérivées totales par rapport à t_1 sont respectivement égales à

$$-\frac{df}{dt_1} \text{ et à } -\frac{d^2 f}{dt_1^2}$$

données par les relations (16) et (18) au facteur $-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^{-1}$ près.

5. Les abaques de comptage.

Il résulte de ce qui précède que si ξ_1 et ξ_2 sont suffisamment grands, l'erreur relative e_r de la mesure C de γ , au moyen de laquelle on s'exprime habituellement, sera distribuée normalement autour d'une moyenne nulle

avec une variance $v^2 = \frac{\text{var } C}{\gamma^2}$ qui, avec (3) et (17) peut encore s'écrire :

$$v^2 = \frac{1}{\xi_1 (R-1)^2} + \frac{R^2}{\xi_2 (R-1)^2}. \quad (20)$$

De plus, comme on a :

$$\xi_1 = \gamma_1 t_1 \quad \text{et} \quad \xi_2 = \gamma_2 t_2, \quad (21)$$

la condition d'optimalité (17) devient :

$$\xi_2 = \xi_1 R \sqrt{R}. \quad (22)$$

Il s'ensuit que si l'on veut que $|e_r|$ soit au plus égal à $V\%$, pour le coefficient $P = (1 - 2\alpha)$, il conviendra de choisir ξ_1 et ξ_2 de manière à avoir :

$$\frac{V}{100} = t_a v, \quad (23)$$

ce qui, avec les relations précédentes, entraîne :

$$\xi_1 = \left(\frac{100 t_a}{V}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2}$$

$$\text{et} \quad \xi_2 = \left(\frac{100 t_a}{V}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2} \cdot R \sqrt{R}. \quad (24)$$

On voit ainsi que pour une valeur de R donnée, les valeurs de ξ_1 et de ξ_2 sont fixées dès que le rapport t_a/V est connu.

De ce fait, l'abaque de détermination de ξ_1 et ξ_2 pourra fournir ces valeurs soit en fonction de R , t_a/V étant fixé, soit en fonction de V et de R , α étant fixé, soit encore en fonction de t_a et de R , V étant fixé.

6. L'abaque universel de G. Ballot.

Cet abaque comporte (fig. 1) une représentation graphique des fonctions $N_1 = \xi_1$ et $N_2 = \xi_2$ en fonction de R suivant les relations (24) où l'on a fait $V = 1$ et $\alpha = 0,001$ ($P = 0,998$), c'est-à-dire $t_a = 3,090$, N_1 et N_2 étant marqués en abscisse suivant une échelle logarithmique de 10^2 à 10^8 , et R , en ordonnée, d'après une échelle fonctionnelle choisie de telle manière que les valeurs de N_1 s'alignent sur une droite.

Pour la détermination de N'_1 et de N'_2 correspondant à $V' \neq 1$, R et t_a restant les mêmes, on note qu'on a :

$$N'_1 = \left(\frac{100 t_a}{V'}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2}$$

$$\text{et} \quad N'_2 = \left(\frac{100 t_a}{V'}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{R}}{(R-1)^2} \cdot R \sqrt{R}, \quad (25)$$

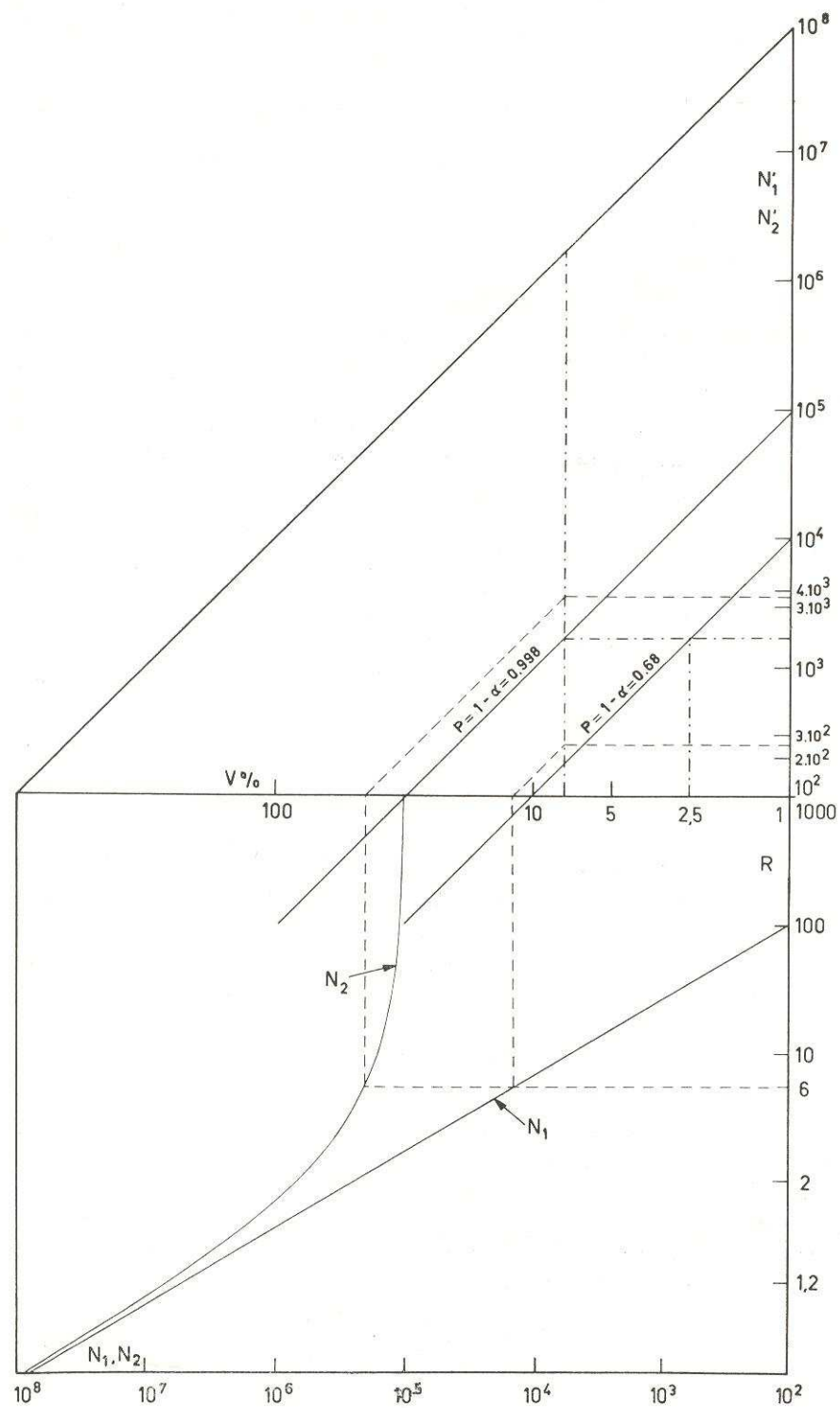


Fig. 1. — Abaque universel de G. Ballot.
Détermination de N'_i pour $R = 6$, $P' = 0,68$ et $V' = 2,5$.

d'où l'on déduit, avec (24) où l'on fait $V = 1$:

$$2 \log V' = -\log N'_i + \log N_i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (26)$$

Il apparaît ainsi que dans un système de coordonnées logarithmiques en V' et N'_i , la relation (26) définit un faisceau de droites parallèles, dans lequel chaque droite correspond à une valeur particulière de N_i .

Dans l'abaque de G. Ballot, ce faisceau de droites a été réalisé en marquant les valeurs de V en échelle logarithmique sur une parallèle aux abscisses du premier graphique de telle manière que $V = 100$ se confonde avec l'abscisse $N_i = 10^6$ et que pour $V = 1$ on retrouve les ordonnées $N'_i = N_i$.

D'autre part, comme la valeur de N'_i correspondant à $V = 100$ et $N_i = 10^6$ est $N'_i = 10^2$, et que les valeurs de N'_i ont été marquées à partir de cette valeur au moyen de la même échelle logarithmique que N_i sur le prolongement de l'axe des ordonnées R du graphique précédent, les droites d'équation (26) se présentent dans le nouveau graphique avec un coefficient angulaire de 45° .

Enfin pour le calcul de l'un des termes de la proportion :

$$\frac{t_{a'}}{V'} = \frac{t_a}{V}, \quad (27)$$

à partir des trois autres termes, on note que cette proportion entraîne la relation :

$$\log V - \log V' = \log t_a - \log t_{a'}, \quad (28)$$

ce qui a été mis à profit en marquant parmi les droites d'équation (26) celles qui coupent l'axe coordonné V aux valeurs $10 t_a$ pour $P = 1 - 2\alpha = 0,50, 0,68, 0,84, 0,90, 0,95, 0,98, 0,998$.

Cela étant, pour le calcul des nombres optimaux N'_1 et N'_2 correspondant au rapport R et aux conditions P' et V' , on procède comme suit (cf. fig. 1) :

1°) on détermine la valeur de V correspondant à $P = 0,998$ en lisant sur la droite ($P = 0,998$) l'abscisse V du point de même ordonnée que le point d'abscisse V' sur la droite (P').

2°) après avoir évalué N_i à l'aide du premier graphique, on obtient N'_i en lisant sur la droite (N_i) du second graphique l'ordonnée N'_i du point d'abscisse V .

7. Le nomogramme de C. Levert.

En faisant $t_a = 1$ et en posant :

$$\frac{\delta_i}{100} = \frac{1}{R-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \quad (29_1)$$

