OBJECTIFS DISCORDANTS ET SOLUTIONS EFFICACES EN PROGRAMMATION MULTICRITERE LINEAIRE

Léopold BRAGARD

Ecole d'Administration des Affaires
Université de Liège

Les principaux résultats de cette note ont été exposés par l'auteur à la troisième journée de travail du groupe EURO sur l'aide à la décision multicritère le 5 mars 1976 à la V.U.B. à Bruxelles.

1. *Introduction.*

Considérons un problème multicritère linéaire dont les objectifs sont de maximiser les fonctions linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sur un ensemble convexe D de R^n.

Classiquement, on suppose qu'il existe un décideur unique dont l'objectif est de maximiser une fonction $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x)$ où les coefficients positifs λ_i sont à déterminer. Fort de cette hypothèse, on se contente alors de rechercher une solution idéale sur la frontière(1) de D. Lorsque les différents objectifs sont relatifs à plusieurs décideurs, pareille hypothèse peut ne pas être vérifiée (B). Même dans le cas d'un seul décideur soumis à des objectifs trop "contradictoires", cette hypothèse peut ne plus être valable. En effet, il peut arriver que les objectifs soient tellement "contradictoires" que l'ensemble des solutions efficaces soit l'ensemble D tout entier !

Dans cet article, nous donnons des théorèmes qui permettent de caractériser les problèmes multicritères linéaires pour lesquels ce phénomène se présente. L'existence de problèmes de ce type nous conduit enfin à formuler quelques remarques pour la résolution des problèmes multicritères linéaires.

---

(1) Il s'agit plus précisément de la "frontière relative" ou marge.

2. Définitions et notations.

Soient f_i, $(i = 1,2, \ldots, p)$, p fonctions de n variables réelles.

On considère un problème multicritère dont les objectifs sont de maximiser les fonctions f_i, $(i = 1, 2, \ldots p)$, sur un ensemble convexe D de R^n. Un point x_o de D est dit *efficace* (ou *non dominé*) pour ce problème s'il n'existe aucun point x' de D tel que $f_i(x') \geq f_i(x_o)$ pour chaque indice i et $f_i(x') > f_i(x_o)$ pour un indice i au moins.

Les objectifs "maximiser f_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$" sont appelés *discordants sur un ensemble convexe* D si tout point de D est efficace pour le problème multicritère dont les objectifs sont de maximiser les f_i sur D (1). Des objectifs non discordants sur D sont dits *concordants* sur D.

Les objectifs "maximiser f_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$" sont dits *discordants* s'ils sont discordants sur tout ensemble convexe D de R^n.

Exemple. Les objectifs "maximiser x_1", "maximiser x_2" et "maximiser $-x_1 -x_2$" sont discordants, puisqu'ils sont manifestement discordants sur tout ensemble convexe de R^2.

Les objectifs "maximiser x_1" et "maximiser x_2" sont visiblement discordants sur l'ensemble $\{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ de R^2.

Nous noterons ^lA l'enveloppe linéaire d'une partie A de R^n, c'est-à-dire la plus petite variété affine contenant A. Le sous-espace vectoriel de R^n translaté de ^lA sera noté ^vA. Enfin, un segment de R^n qui contient ses extrémités a et b sera noté (a,b).

3. Objectifs linéaires discordants et sous-espaces vectoriels.

Théorème 1. *Soient* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *p fonctions linéaires de* n *variables réelles. Les objectifs "maximiser* f_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$*" sont discordants sur un ensemble convexe* D *de* R^n *si et seulement si l'ensemble*

$$I = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in R^n \mid f_i(x) \geq 0\} \cap {}^vD$$

est un sous-espace vectoriel de R^n*; en ce cas,* I *n'est d'ailleurs rien d'autre que l'espace vectoriel*

(1) On supposera p > 1 pour éviter qu'un seul critère puisse être discordant sur un ensemble D (par exemple lorsque D se réduit à un singleton).

$$(\bigcap_{i=1}^{p} N_i) \cap {}^{v}D$$

où N_i *est le noyau de* f_i .

Preuve. Supposons d'abord que les objectifs soient discordants et montrons que I est un sous-espace vectoriel de R^n.

D'abord, I est un cône convexe de sommet 0 comme intersection de tels cônes. De plus, I est symétrique. En effet, si tel n'est pas le cas, il existe un point u de I tel que -u n'appartienne pas à I. Comme u appartient à ${}^{v}D$, il existe un point x_o de D et un réel strictement positif λ tels que

$$(x_o - \lambda u, x_o + \lambda u) \subset D.$$

Puisque $-\lambda u$ appartient à ${}^{v}D$ sans appartenir à I, il existe un indice i au moins tel que $f_i(-\lambda u) < 0$; soit j cet indice. La linéarité de f_j livre $f_j(u) > 0$, d'où $f_j(x_o + \lambda u) > f_j(x_o)$. Pour les autres indices, les relations $f_i(x_o + \lambda u) = f_i(x_o) + \lambda f_i(u)$ et $f_i(u) \geqslant 0$ conduisent à $f_i(x_o + \lambda u) \geqslant f_i(x_o)$. On en déduit que x_o n'est pas efficace, ce qui est absurde.

Réciproquement, supposons que I soit un sous-espace vectoriel de R^n et montrons que les objectifs sont discordants sur D.

Soit x_o un point quelconque de D. Si x_o n'est pas efficace, il existe un point x' de D tel que $f_i(x') \geqslant f_i(x_o)$ pour tout indice i et $f_i(x') > f_i(x_o)$ pour un indice i au moins. Soit j un indice tel que $f_j(x') > f_j(x_o)$. Les inégalités $f_j(x' - x_o) > 0$ et $f_i(x' - x_o) \geqslant 0$ montrent que $x' - x_o$ appartient à I. Par contre, l'inégalité $f_j(x_o - x') < 0$ montre que $x_o - x'$ n'appartient pas à I, ce qui contredit le caractère symétrique de I.

Pour la dernière partie de l'énoncé, on observera que le caractère symétrique de I permet d'affirmer que $f_i(y) = 0$ pour tout i et pour tout y de I. Inversement, si y est un point de ${}^{v}D$ tel que $f_i(y) = 0$ pour tout i, il est clair que y appartient à I.

Théorème 2. *Soient* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ p *fonctions linéaires de* n *variables réelles. Les objectifs "maximiser* f_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$*" sont discordants sur un ensemble convexe* D *de* R^n *si et seulement si aucun des systèmes*

$$S_1 \begin{cases} f_1(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq 1), \\ x \in {}^{v}D \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} f_2(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq 2), \\ x \in {}^{v}D \end{cases} \ldots, \qquad S_p \begin{cases} f_p(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq p) \\ x \in {}^{v}D \end{cases}$$

n'admet de solution.

Preuve. Si les objectifs sont discordants et si S_j, par exemple, admet une solution x_j, celle-ci appartient à $I = \cap \{x \in R^n \mid f_i(x) \geq 0\} \cap {}^{v}D$ sans faire partie de $(\cap N_i) \cap {}^{v}D$, ce qui est absurde en vertu du théorème 1.

Pour la réciproque, si aucun des systèmes S_j n'admet de solution et si les objectifs ne sont pas discordants sur D, I n'est pas un sous-espace vectoriel, donc il diffère du sous-espace $(\cap N_i) \cap {}^{v}D$, il existe donc un indice i et un élément x de I tels que $f_i(x) > 0$, ce qui est absurde.

Remarque. La discordance d'objectifs linéaires sur un convexe D est liée à la nature du sous-espace ${}^{v}D$ et non à la forme particulière de D au sein de ${}^{1}D$. En effet, *si des objectifs linéaires f_i sont discordants sur un ensemble convexe D, ils le sont également sur tout convexe E tel que ${}^{v}E = {}^{v}D$ (en particulier sur ${}^{v}D$ lui-même) et,* mieux même, *sur tout convexe F tel que ${}^{v}F$ soit un sous-espace vectoriel* de ${}^{v}D$. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1 (ou même du théorème 2).

En corollaire, on peut affirmer que *l'étude de la discordance d'objectifs linéaires sur les convexes de R^n se ramène à l'étude de la discordance de ces objectifs sur les seuls sous-espaces vectoriels de R^n.*

Le théorème suivant découle de la remarque précédente :

Théorème 3. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ p fonctions linéaires de n variables réelles. Les objectifs "maximiser f_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$" sont discordants si et seulement si l'ensemble*

$$I = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in R^n \mid f_i(x) \geq 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de R^n, ou encore si et seulement si aucun des systèmes

$$S_1 \begin{cases} f_1(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq 1) \end{cases}, \quad S_2 \begin{cases} f_2(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq 2) \end{cases}, \ldots, \quad S_p \begin{cases} f_p(x) > 0 \\ f_i(x) \geq 0 \ (i \neq p) \end{cases}$$

n'admet de solutions.

4. Objectifs linéaires discordants et multiplicateurs.

Théorème 4. *Soient* $c_1.x$, $c_2.x$, ..., $c_p.x$, p *fonctions linéaires de* n *variables réelles* x_1, x_2, ..., x_n.
Les objectifs *"maximiser* $c_i.x$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$*" sont discordants si et seulement s'il existe* p *réels* λ_k *strictement positifs tels que* $\Sigma\lambda_k c_k = 0$.

Le théorème découle presque immédiatement des deux théorèmes suivants qu'on pourra trouver dans [F] et dans [V] :

a) Un point x_o intérieur à un ensemble D est efficace pour le problème multicritère de maximisation des fonctions $c_i.x$ sur D si et seulement s'il existe p réels λ_k strictement positifs tels que $\Sigma\lambda_k c_k = 0$.

b) Soit x_o un point d'un ensemble D où la fonction $\Sigma\lambda_j c_j.x$ (λ_j réels strictement positifs arbitrairement choisis) atteint son maximum sur D. Alors x_o est un point efficace pour le problème multicritère de maximisation des fonctions $c_i.x$ sur D.

Preuve du théorème. Si les objectifs sont discordants, ils sont aussi discordants sur R^n de sorte que tout point de R^n est efficace. En vertu de a), on peut trouver p réels $\lambda_k > 0$ tels que $\Sigma\lambda_k c_k = 0$.

Réciproquement, s'il existe des réels $\lambda_k > 0$ tels que $\Sigma\lambda_k c_k = 0$, on a aussi $\Sigma\lambda_k c_k.x = 0$ et, en vertu de b), tout point de R^n est efficace.

Le théorème 4 peut être généralisé de la manière suivante :

Théorème 5. *Soit* D *un ensemble convexe et* v_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, *des vecteurs formant une base du sous-espace vectoriel supplémentaire de* $^V D$. *Les objectifs "maximiser* $c_i.x$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$*" sont discordants sur* D *si et seulement s'il existe* p *réels strictement positifs* λ_k *et* q *réels quelconques* μ_k *tels que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i + \sum_{k=1}^{q} \mu_k v_k = 0 .$$

Preuve. Supposons d'abord que les objectifs soient discordants sur D. En vertu du théorème 1, l'ensemble

$$I = \cap\{x \in R^n \mid c_i.x \geqslant 0\} \cap {}^{V}D$$

est un sous-espace vectoriel de R^n. Comme I peut encore s'écrire

$$I = [\cap\{x \in R^n | c_i.x \geqslant 0\}] \cap [\cap\{x \in R^n | v_k.x \geqslant 0\}] \cap [\cap\{x \in R^n | v_k.x \leqslant 0\}] ,$$

le théorème 3 permet d'affirmer que les objectifs maximiser $c_i.x$, maximiser $v_k.x$, maximiser $(-v_k.x)$ sont discordants sur R^n. Il reste alors à faire appel au théorème 4 pour obtenir une relation

$$\Sigma\lambda_i c_i + \Sigma\mu'_k v_k - \Sigma\mu''_k v_k = 0 ,$$

avec les λ_i, μ'_k, μ''_k strictement positifs, ou encore

$$\Sigma\lambda_i c_i + \Sigma\mu_k v_k = 0 ,$$

avec les λ_i strictement positifs et les μ_k quelconques.

Réciproquement, supposons qu'il existe des coefficients $\lambda_i > 0$ et μ_k quelconques tels que

$$\Sigma\lambda_i c_i + \Sigma\mu_k v_k = 0 .$$

Cette expression peut encore s'écrire

$$\Sigma\lambda_i c_i + \sum_{k=1}^{q} \mu'_k v_k - \sum_{k=q+1}^{2q} \mu'_k v_k = 0$$

avec les coefficients λ_k et μ'_k strictement positifs. Il suffit, par exemple, de remplacer $\mu_k v_k$ par $v_k - v_k$, $[(\mu_k + 1)-1]v_k$, $[(\mu_k - 1)+1]v_k$ selon que μ_k est nul, positif ou négatif. Le théorème 4 permet alors d'affirmer que les objectifs maximiser $c_i.x$, maximiser $v_k.x$, maximiser $(-v_k.x)$ sont discordants sur R^n.

En vertu du théorème 3, l'ensemble

$$[\cap\{x \in R^n | c_i.x \geqslant 0\}] \cap [\cap\{x \in R^n | v_i.x \geqslant 0\}] \cap [\cap\{x \in R^n | v_i.x \leqslant 0\}]$$

est un sous-espace vectoriel qui peut encore s'écrire

$$[\cap\{x \in R^n \mid c_i.x \geqslant 0\}] \cap {}^{V}D .$$

Il reste à faire appel au théorème 1 pour constater que les objectifs "maximiser $c_i.x$" sont discordants sur D.

Exemple. Si $D = \{x \in R^2 | x_1 + x_2 = 1\}$, les objectifs maximiser x_1 et maximiser x_2 sont discordants sur D puisque

$$(1,0) + (0,1) - (1,1) = 0 ,$$

le vecteur (1,1) constituant à lui seul une base du sous-espace vectoriel supplémentaire de ${}^{V}D$.

5. *Conclusions.*

Avant de choisir une méthode de résolution d'un problème multicritère qui conduit nécessairement à une solution appartenant à la frontière relative de l'ensemble délimité par les contraintes, il est prudent de s'interroger sur la concordance ou la discordance des objectifs.
Lorsqu'il est difficile d'établir la concordance des objectifs, on donnera la préférence à une méthode qui ne conduit pas à coup sûr à un point de la frontière relative de l'ensemble défini par les contraintes. En effet, pour des objectifs discordants, le simple bon sens suggère quelquefois d'adopter comme solution un point de l'intérieur relatif de l'ensemble défini par les contraintes.
Signalons au passage que la méthode que nous avons donnée en [B] livre à très peu de frais une solution de compromis dans le cas d'objectifs discordants.

Références

[B] BRAGARD, L., Une méthode de programmation multicritère, Communication faite le 28.1.75 au Congrès EURO 1.

[F] FREHEL, J., Problèmes multicritères : théorie de la domination de Yu et efficacité de Pareto, *METRA*, vol. XIII, n°1, 1974.

[V] VINCKE, P., Problèmes multicritères, Colloque sur la programmation mathématique, 28 et 29.5.74, Institut des Hautes Etudes de Belgique.