

DE AANWENDING VAN MACRO-ECONOMISCHE GROEIMODELLEN IN ALTERNATIEVE ECONOMISCHE SITUATIES

door W. van RIJCKEGHEM
Rijksuniversiteit te Gent

Dit artikel is gewijd aan het onderzoek van alternatieve economische situaties en de verschillende groeimodellen welke er kunnen op worden toegepast. Hoewel de modellen welke we zullen ontwikkelen niet als werkelijk nieuw kunnen beschouwd worden, vertegenwoordigen zij toch een bescheiden poging om weg te geraken van de gangbare « onlooker approach » welke zo sterk door Prof. Frisch werd bekritiseerd ⁽¹⁾. Meer bepaald, zullen we vergelijkingen invoeren waarin een zekere graad van monetair onevenwicht evenals een zekere graad van onevenwicht op de arbeidsmarkt worden toegelaten. Daarna zullen we overgaan tot het bepalen van de optimale konstellatie van deze onevenwichten door een gegeven voorkeursfunctie te maximaliseren.

I. Eerste situatie : vaste productiecoëfficiënten, autonome investeringen, autonoom arbeidsaanbod, geen enkele vrijheidsgraad.

Dit model mag beschouwd worden als een veralgemening van het bekende *Domar-model*. Het is gesteund op de veronderstelling van autonome investeringen (vergelijking i) en op het evenwicht tussen de inkomens- en capaciteitseffekten van deze gegeven investeringen (vergelijkingen ii, iii en iv) ⁽²⁾ :

- (i) $I = I_0 e^{rt}$ Autonome investeringen
- (ii) $\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{s}$ Inkomenseffekt van investeringen
- (iii) $\dot{P} = \frac{I}{v}$ Capaciteitseffect van investeringen
- (iv) $\dot{P} = \dot{Y}$ Monetair evenwicht.

⁽¹⁾ Zie vooral zijn « Preface tot the Oslo Channel Model » in « Europe's Future in Figures ». Ed. R. Geary, Amsterdam (1962), pp. 248-86.

⁽²⁾ Cf. E. Domar : « Essays in the Theory of Economic Growth », New York (1957). In verband met dit artikel, zie vooral Essay IV : « Expansion and Employment », p. 97.

In tegenstelling met Domar die, hoewel steeds met een slecht geweten ⁽³⁾ de situatie op de arbeidsmarkt verwaarloost, zullen we het model vervolledigen met een vraag- en aanbodsfunctie voor arbeid ⁽⁴⁾. Verder zullen we ons niet beperken tot evenwichtssituaties, doch vergelijkingen invoeren waarin een zekere graad van onevenwicht tussen vraag en aanbod, zowel op de goederen- als op de arbeidsmarkt mogelijk is.

In feite onderzocht R. Frisch reeds de mogelijkheid van een zeker onevenwicht op de goederenmarkt ⁽⁵⁾:

$$(iv)' \quad \dot{Y} = \chi \dot{P}$$

waar χ een konstante is welke de graad van capaciteitsbenutting weerspiegelt. Het lijkt ons echter geenszins noodzakelijk, en zelfs niet realistisch χ als een konstante te beschouwen. Het is meer aangewezen χ in het model te introduceren als een variabele:

$$(iv)'' \quad \chi = \frac{\dot{Y}}{\dot{P}}$$

De waarde van χ is nauw verbonden met het begrip *monetair evenwicht*. Wanneer χ groter is dan één, dan is de stijging van de effectieve vraag groter dan de toename van het potentiële aanbod, wat tenminste in sommige sectoren zal leiden tot produktietekorten en inflatoire prijsstijgingen. Het omgekeerde proces zal zich doorzetten in geval dat χ kleiner is dan één.

Wij zullen nu de vergelijkingen invoeren, die de situatie op de arbeidsmarkt weerspiegelen:

$$(v) \quad a^* = a_0^* e^{ct} \quad \text{Autonoom arbeidsaanbod}$$

$$(vi) \quad a = k Y^b \quad \text{Vraag naar arbeid}^{(6)}$$

$$(vii) \quad \rho = \frac{a}{a^*} \quad \text{Graad van evenwicht op de arbeidsmarkt.}$$

Een waarde van ρ groter dan één impliceert een over-vraag naar arbeid, een waarde kleiner dan één weerspiegelt een situatie van werkloosheid.

⁽³⁾ « In the subsequent essays I chose the easier of the two solutions, but with an ever-guilty conscience. I thought that the mere introduction of labor as another factor in a simple production function would be a rather minor improvement ». Essays... op. cit., p. 7.

⁽⁴⁾ Zie ook P.J. Verdoorn: « Complementarity and Long-Range Projections ». *Econometrica* (1956) n° 4, vooral p. 436.

⁽⁵⁾ R. Frisch: « A Reconsideration of Domar's Theory of Economic Growth ». *Econometrica* (1961) n° 3, p. 410.

⁽⁶⁾ Dit impliceert dat de vraag naar arbeid bepaald wordt door de effectieve vraag, en niet door de produktiekapaciteit.

Bij het tellen van het aantal onafhankelijke vergelijkingen en het aantal variabelen komen we tot 7 vergelijkingen en 7 variabelen (Y , P , I , a^* , a , χ , ρ). Bijgevolg is het model bepaald en bevat het *geen enkele vrijheidsgraad*. Lossen we op naar χ en ρ , dan bekomen we :

$$(viii) \quad \chi = \frac{v r}{s}$$

$$(ix) \quad \rho = n_0 e^{(br-c)t} \quad \text{waar} \quad n_0 = \frac{k Y_0^b}{a_0^*}$$

Een hoog groeiritme van de investeringen zal terzelfdertijd χ en ρ doen stijgen, of zal m.a.w. een tendens tot arbeidstekort en inflatie in het leven roepen.

Tot nog toe impliceerde onze analyse nog geen enkele vorm van overheidstussenkomst. We kunnen echter gemakkelijk een situatie uitdenken waarin de overheid tracht een zekere graad van evenwicht op de arbeidsmarkt te bereiken, b.v. $\rho = 0,97$, dit door het beïnvloeden van het groeiritme der investeringen. Uit (viii) is het echter duidelijk dat in dit geval ook de waarde van χ zal worden beïnvloed.

Voorbeeld :

$$\begin{aligned} n_0 &= 0,95 && (5 \% \text{ werkloosheid op } t = 0) \\ b &= 0,5 && (\text{productie-elasticiteit van vraag naar arbeid} = 0,5) \\ c &= 0,03 && (\text{groei van arbeidsaanbod } 3 \% \text{ per jaar}). \end{aligned}$$

Wanneer de doelstelling van de economische politiek erin bestaat te bekomen dat $\rho = 0,97$ op $t = 1$, dan moeten we een oplossing vinden voor :

$$(ix) \quad 0,97 = 0,95 e^{(0,5r-0,03)} \\ \text{of} \quad r = 10,2 \%$$

d.w.z. dat de investeringen van $t = 0$ naar $t = 1$ moeten toenemen met 10,2 %.

Wanneer we dit resultaat vervangen in (viii), bekomen we :

$$(viii) \quad \chi = \frac{0,102 v}{s}$$

Nemen we aan dat $s = 0,18$ en $v = 3$, dan bekomen we dat $\chi = 1,7$, wat een aanzienlijke inflatiegraad impliceert.

Dit monetaire onevenwicht kan negatieve welvaartseffekten voor gevolg hebben, welke het positief effect van een hoge tewerkstellingsgraad te niet doen, dit overeenkomstig een welvaartsfunctie van de vorm :

$$(x) \quad W = \alpha - \beta (\chi - 1)^2 - \gamma (\rho - 1)^2$$

De functie (x) impliceert dat zowel afwijkingen naar boven als naar beneden van het evenwicht op de goederenmarkt als op de arbeidsmarkt negatieve welvaartseffekten in het leven roepen. Het is duidelijk dat de welvaartsfunctie een absoluut maximum bereikt voor $\chi = \rho = 1$, doch over het algemeen zal het niet mogelijk zijn een groeiritmte voor de investeringen te vinden zodanig dat aan deze beide vereisten terzelfdertijd voldaan is. Wiskundig gezien moet de functie (x) gemaximaliseerd worden onder de beperkingen (viii) en (ix), welke kunnen gekombineerd worden tot :

$$(xi) \quad \rho = n_0 e^{[(bsx/v)-c]t}$$

Door aanwending van de multiplier van Lagrange, bekomen we dan een uitdrukking in χ :

$$\chi = \frac{v\beta - \gamma n_0 e^{[(bsx/v)-c]t} [n_0 e^{[(bsx/v)-c]t} - 1]}{\beta v}$$

Dit kan worden opgelost naar χ door opeenvolgende benaderingen. Deze optimale waarde voor χ kan dan worden ingevuld in (xi) waardoor de overeenstemmende optimale waarde voor ρ gevonden wordt. Door gebruik te maken van (viii) of (ix) kan dan tenslotte de optimale investeringsgroei bepaald worden. Doorgaans zal deze waarde verschillend zijn op verschillende tijdstippen.

II. Tweede situatie : vaste produktiecoëfficiënten, geïnduceerde investeringen, autonoom arbeidsaanbod, één vrijheidsgraad.

Dit model kan beschouwd worden als een uitbreiding van het Harrod-model, waarbij dezelfde benaderingswijze gebruikt wordt als in vorige sectie ⁽⁷⁾ :

- | | | |
|-------|----------------------|---|
| (i) | $S = sY$ | Aanbod van besparingen |
| (ii) | $I = v\dot{Y}$ | Vraag naar besparingen (investeringen) |
| (iii) | $\chi = I/S$ | Graad van monetair evenwicht |
| (iv) | $a^* = a_0^* e^{ct}$ | Autonoom arbeidsaanbod |
| (v) | $a = kY^b$ | Vraag naar arbeid |
| (vi) | $\rho = a/a^*$ | Graad van evenwicht op de arbeidsmarkt. |

⁽⁷⁾ R.F. Harrod : « An Essay in Dynamic Theory ». The Economic Journal (1939). pp. 14-33. Zie ook Verdoorn, loc. cit.

Vergelijking (iii) drukt hetzelfde verband uit als vergelijking (iv) in het voorgaande model. In de gangbare groeimodellen is het sparen steeds gelijk aan de investeringen (ex-ante). Het lijkt ons echter niet noodzakelijk zulk een restriktieve veronderstelling te maken. Zoals wij in het voorgaande model de mogelijkheid aanvaardden van een zeker onevenwicht tussen totale vraag en totaal aanbod van goederen, kunnen wij nu een onevenwicht tussen sparen en investeren toelaten, dat in feite hetzelfde fenomeen weerspiegelt. Een waarde van $\chi > 1$ impliceert inderdaad dat de investeringen groter zijn dan het sparen, wat opnieuw moet leiden tot produktietekorten in ten minste enkele sectoren ⁽⁸⁾.

Het model bestaat nu uit zes vergelijkingen en zeven variabelen (Y , S , I , a^* , a , χ , ρ) en bevat bijgevolg *één vrijheidsgraad*. Dit schijnt het essentieel verschil te zijn tussen modellen van het Harrod- en modellen van het Domar-type ⁽⁹⁾.

In dit model is het bijgevolg mogelijk een gegeven tewerkstellingsgraad te bereiken zonder dat de overheid haar toevlucht moet nemen tot beïnvloeding van het groeiritme der investeringen. Wel moet dan de graad van monetair evenwicht los gelaten worden. Omgekeerd is het mogelijk een gegeven graad van monetair evenwicht te realiseren zonder investeringsrestrikties, doch dan leidt de werking van het economisch mechanisme tot een zeker onevenwicht op de arbeidsmarkt. Het is niet mogelijk *terzelfdertijd* χ en ρ te fixeren. Wel kunnen we trachten de welvaartsfunctie te maximaliseren door een waarde van χ te kiezen die met een dusdanige waarde van ρ overeenstemt, dat het verlies in sociale bevrediging zo klein mogelijk is. Dit impliceert dat we opnieuw de welvaartsfunctie (x) uit de vorige sectie zullen maximaliseren onder de restriktie (xi). We zullen dan dezelfde optimale konstellatie bekomen als voorheen, doch nu is geen tussenkomst van de overheid vereist om het groeiritme van de investeringen te beïnvloeden.

III. *Derde situatie : substitutie tussen produktiefactoren, autonoom arbeidsaanbod, twee vrijheidsgraden.*

a) *Volledige substitutie.*

Dit model kan beschouwd worden als een veralgemening van her Ver-

⁽⁸⁾ Zie b.v. A.C. Enthoven : « Monetary Disequilibrium and the Dynamics of Inflation ». The Economic Journal (1956), pp. 256-70.

⁽⁹⁾ Zie ons artikel : « The Structure of some Macro-Economic Growth Models : A Comparison ». Weltwirtschaftliches Archiv (1963), III.

doorn-model ⁽¹⁰⁾ :

- | | | |
|-------|------------------------|--|
| (i) | $Y = A a^f K^g e^{ht}$ | Produktiefunctie met volledige substitutie |
| (ii) | $S = s Y$ | Spaarfunctie |
| (iii) | $\chi = \dot{K}/S$ | Graad van monetair evenwicht |
| (iv) | $a^* = a_0^* e^{ct}$ | Autonoom arbeidsaanbod |
| (v) | $\rho = a/a^*$ | Graad van evenwicht op de arbeidsmarkt. |

Het model bestaat nu uit vijf vergelijkingen en zeven variabelen en bevat bijgevolg *twee vrijheidsgraden*. We mogen bijgevolg zowel aan χ als aan ρ de waarden toekennen die we wensen. Het is echter duidelijk dat we deze waarden zodanig zullen kiezen dat de welvaartsfunctie (x) een absoluut maximum bereikt, nl. $\chi = \rho = 1$. Dit is de logische verklaring voor het feit dat in modellen van dit soort steeds monetair evenwicht en volledige tewerkstelling worden verondersteld. *Beide* doelstellingen kunnen nu worden verwezenlijkt. Dit is het onmiddellijke gevolg van de overgang van een situatie met vaste produktiecoëfficiënten naar een situatie met substitutiemogelijkheden.

Wanneer we (iv) en (v) vervangen in (i), bekomen we :

$$(i)' \quad Y = A \rho^f a_0^{*f} e^{(cf+h)t} K^g$$

Anderzijds levert combinatie van (ii) en (iii) op :

$$(ii)' \quad \dot{K} = \chi s Y$$

We zien bijgevolg dat Y een funktie is van K, en K een funktie van Y. De oplossing wordt gemakkelijkst bekomen wanneer we eerst oplossen naar K. We vinden dan :

$$K = \left[\frac{\chi (1-g) s A \rho^f a_0^{*f}}{cf + b} [e^{(cf+h)t} - 1] + K_0^{1-g} \right]^{1/(1-g)}$$

Substitutie van dit resultaat in (i)' levert op :

$$Y = A \rho^f a_0^{*f} e^{(cf+h)t} \left\{ \frac{\chi (1-g) s A \rho^f a_0^{*f}}{cf + b} [e^{(cf+h)t} - 1] + K_0^{1-g} \right\}^{g/(1-g)}$$

⁽¹⁰⁾ P.J. Verdoorn: « The Role of Capital in Long-Term Projection Models », Cahiers Economiques de Bruxelles, n° 5 (1959), pp. 49-70. Verdoorn veronderstelt volledige tewerkstelling en monetair evenwicht. In feite was het Tinbergen die voor het eerste een Cobb-Douglas funktie aanwendde in een macro-economisch groei-model (Zur Theorie der langfristigen Wirtschaftsentwicklung », Weltwirtschaftliches Archiv, 1942, pp. 511-49). Het Verdoorn-model mag beschouwd worden als een speciaal geval van het Tinbergen-model wanneer de loonflexibiliteit oneindig groot wordt.

Logaritmische afleiding levert uiteindelijk het groeiritme voor Y op :

$$(vi) \quad R = (cf + b) \times \frac{\chi s A \rho^f a_0^{*f} e^{(cf+h)t} - (1-g) \chi s A \rho^f a_0^{*f} + K_0^{1-g} (cf + b)}{\chi (1-g) s A \rho^f a_0^{*f} e^{(cf+h)t} - (1-g) \chi s A \rho^f a_0^{*f} + K_0^{1-g} (cf + b)}$$

Dit groeiritme convergeert naar de asymptoot :

$$(vii) \quad \frac{cf + b}{1 - g}$$

Dit leidt tot de merkwaardige konklusie dat op lange termijn het groeiritme van Y niet alleen onafhankelijk is van de spaarkwote s , doch ook van de graad van onevenwicht op de arbeidsmarkt als van de graad van monetair onevenwicht ! Dit impliceert dat twee landen, op voorwaarde dat zij starten met gelijke parameterwaarden c , f en g , zullen eindigen met dezelfde groei, welke ook hun spaarkwote weze en de graad van tewerkstelling of van monetair evenwicht ⁽¹¹⁾.

b) *Substitutie tussen « nieuw kapitaal » en « nieuwe arbeid ».*

Dit model zullen we het Johansen-model noemen, daar L. Johansen de eerste was om dit substitutieprincipe in een macro-economisch groeimodel aan te wenden ⁽¹²⁾. Wiskundig wordt het uitgedrukt door de vergelijking :

$$(i)^* \quad \dot{Y} = A \dot{a}^f \dot{K}^g e^{ht} \quad \text{Produktiefunctie met alleen substitutie tussen « nieuw kapitaal » en « nieuwe arbeid ».}$$

De overige vergelijkingen van het model blijven dezelfde als in het voorgaand model. We bekommen nu de volgende oplossing naar Y :

$$Y = \left\{ \frac{\chi (1-g) s^g A \rho^f a_0^{*f} c^f}{cf + b} [e^{(cf+h)t} - 1] + Y_0^{1-g} \right\}^{1/(1-g)}$$

en als groeiritme :

$$(vi)^* \quad R = (cf + b) \times \frac{s^g \chi A \rho^f a_0^{*f} c^f e^{(cf+h)t}}{\chi (1-g) s^g A \rho^f a_0^{*f} c^f [e^{(cf+h)t} - 1] + Y_0^{1-g} (cf + b)}$$

⁽¹¹⁾ Uit een recent artikel van H. Brems, dat wij de gelegenheid hadden in manuscriptvorm te zien (« Growth in a Two-Country Cobb-Douglas Model with a Variable Exchange Rate »), bleekt dat de uiteindelijke groei ook onafhankelijk zou zijn van de graad van internationale handel.

⁽¹²⁾ L. Johansen : « Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth : a Synthesis », *Econometrica* (1959), pp. 157-76. Zie vooral sectie 3 : « The case of capital of infinite duration ».

Dit groeiritme convergeert naar de asymptoot :

$$(vii)^* \quad \frac{cf + b}{1 - g}$$

Dit resultaat is identisch met dat gevonden in het model met volledige substitutie. Dit betekent dat in vergelijking met de konklusies van de vorige sekte, het uiteindelijk groeiritme bovendien nog onafhankelijk is van het feit of we volledige substitutie hebben tussen de produktiefactoren arbeid en kapitaal, dan wel of deze substitutiemogelijkheden beperkt zijn tot « nieuw kapitaal » en « nieuwe arbeid ».

Om deze reden lijkt het uiteindelijk groeiritme ons een weinig interessant criterium om groeimodellen van dit type te vergelijken. Van meer belang in dit verband is het groeiritme voor $t = 0$. Gezien het groeiritme asymptotisch verloopt naar steeds dezelfde limiet, is een hoger groeiritme in het aanvangsjaar een aanduiding voor een permanente superioriteit in groeiprestatie.

In het geval van volledige substitutie bekommen we :

$$(viii) \quad R_0 = cf + b + \frac{\chi^g s A \rho^f a_0^{*f}}{K_0^{1-g}}$$

In het geval van substitutie tussen nieuw kapitaal en nieuwe arbeid vinden we :

$$(viii)^* \quad R_0 = \frac{\chi^{sg} A \rho^f a_0^{*f} c^f}{Y_0^{1-g}}$$

Hieruit blijkt dat in normale gevallen de aanvangsgroei hoger ligt in modellen met volledige substitutie, vooral wanneer men let op het feit dat c^f een vrij kleine waarde is die enkel in de formule (viii)* voorkomt. De voornaamste reden waarom in (viii)* doorgaans met zulke lage groeiwaarden gestart wordt schijnt te zijn dat de technologische vooruitgang in deze formule niet voorkomt, in vergelijking met (viii) waar deze faktor een belangrijke plaats inneemt. Dit is eveneens duidelijk in (i)* waar de technische vooruitgang alleen de *toename* in Y bepaalt en niet het ganse produktievolume als in (i). Men moet er echter mee rekening houden dat de parameterwaarden in de produktiefunctie (i)* niet noodzakelijk dezelfde zijn als in (i). Zo is het b.v. mogelijk dat de kapitaals- en arbeidselasticiteiten g en f verschillend zijn. L. Johansen zelf meent dat in zijn model $f = g = 0,5$ een realistische hypotese kan zijn, in tegenstelling met $f = 0,75$ en $g = 0,25$ in het model met een gewone Cobb-Douglas funktie ⁽¹³⁾. De betekenis van de para-

⁽¹³⁾ L. Johansen : « Investeringsrate og Vekstrate », *Ekonomiska Samfundets Tidskrift* (1960), pp. 169-79. Zie vooral p. 177.

meter A kan ook verschillen zijn: hij beïnvloedt alleen de toename in Y in (i)* doch het niveau van Y in (i). Hierdoor komt een rechtstreekse vergelijking tussen de groeiprestaties van de twee modellen op losse schroeven te staan. Meer empirisch materiaal is noodzakelijk om hierin inzicht te verwerven. Bij ons weten werd echter de produktiefunctie (i)* nog niet empirisch getoetst.

IV. Een groeimodel voor de Belgische economie.

Het is hier wellicht de plaats enige beschouwingen te wijden aan het Belgisch groeimodel dat onlangs werd gepubliceerd in het eerste ASEPELT-volume: « Europe's Future in Figures »⁽¹⁴⁾. Dit model bestaat uit de volgende vergelijkingen:

- | | | |
|-------|------------------------|--|
| (i) | $Y = A a^t K^g e^{ht}$ | Produktiefunctie met volledige substitutie in de endogene sectoren |
| (ii) | $Y' = r Y'_{-1}$ | Groei van totaal BNP |
| (iii) | $S = s Y'$ | Spaarfunctie |
| (iv) | $S = I$ | Monetair evenwicht |
| (v) | $K = K_{-1} + I$ | Toename van de kapitaalvoorraad |
| (vi) | $a^* = a_0^* e^{ct}$ | Autonome groei van arbeidsaanbod |
| (vii) | $\rho = a/a^*$ | Graad van evenwicht op de arbeidsmarkt. |

De verschillende symbolen Y en Y' hebben betrekking op het onderscheid tussen totaal BNP, weergegeven door Y' , en het deel van het BNP dat door de endogene sectoren wordt geproduceerd (Y). Het verschil tussen beide concepten omvat de bijdrage van de exogene sectoren waarvoor autonome groeiritmen worden verondersteld (landbouw, woningbouw, overheidssektor en huishoudelijke hulp). De ontwikkeling van de endogene sectoren wordt weergegeven door (i). De groei van het totale BNP wordt uitgedrukt door (ii). Aangenomen werd:

$$r = 1,036$$

Deze *veronderstelling* is gesteund op de redenering dat het BNP in de toekomst verder zal groeien zoals gedurende de periode 1948-55 het geval was, nl. 3,6 % per jaar gemiddeld.

⁽¹⁴⁾ « Groupe d'Etudes de la Comptabilité Nationale: L'Economie belge d'ici à 1975 », op. cit., pp. 1-54. We geven hier een vereenvoudigde versie van het model weer, zonder afschrijvingen, overheidsuitgaven en internationale handel, om vergelijking met voorgaande modellen te vergemakkelijken. Geen enkel essentieel aspect gaat hierdoor echter verloren.

Als spaarkwote wordt aangenomen :

$$s = 0,13$$

Overeenkomstig (iv) wordt monetair evenwicht aangenomen, doch een zekere werkloosheidsgraad wordt verondersteld (4,3 %). Darom is :

$$p = 0,957$$

Anderzijds wordt aangenomen dat het autonome groeiritme van het arbeidsaanbod, na aftrek van de arbeid benodigd door de exogene sectoren, wordt weergegeven door :

$$c = 0,0017$$

Het model, zoals hierboven geschetst bevat 7 vergelijkingen en 7 variabelen (Y , Y' , a , a^* , K , S , I) en is dus op het eerste gezicht bepaald. De vrijheidsgraden χ en ρ zijn reeds opgebruikt door de veronderstelling van monetair evenwicht en van 4,3 % werkloosheid. In feite nochtans is het model *overbepaald*, omdat de variabelen Y en Y' niet onafhankelijk zijn. Daarom zou er een vergelijking moeten aan toegevoegd worden die het verband tussen totaal BNP en het endogeen BNP specificeert. Dit brengt ons tot 8 vergelijkingen en 7 variabelen. Het model kan dan slechts opnieuw bepaald gemaakt worden door één van de parameters variabel te maken ⁽¹⁵⁾.

Dit blijkt duidelijk wanneer men overgaat tot de oplossing van het model. Zoals in de voorgaande modellen aangetoond is de oplossing van modellen met Cobb-Douglas functies iets meer ingewikkeld door het feit dat terzelfdertijd Y een functie is van K en K een functie van Y . In het Belgisch groei-model werd deze moeilijkheid ontweken door de hypotese (ii) welke een *konstant* groeiritme veronderstelt ⁽¹⁶⁾. Hierdoor was het mogelijk aan het model een rekursieve structuur te geven, die toelaat onmiddellijk een oplossing naar K te bepalen :

$$K = K_{-1} + r s Y'_{-1}$$

Van dit resultaat kunnen we het groeiritme van K afleiden :

$$R_K = \frac{K}{K_{-1}} = 1 + r s \frac{Y'_{-1}}{K_{-1}} = 0,135 \frac{Y'_{-1}}{K_{-1}}$$

Hieruit blijkt duidelijk dat een konstant groeiritme voor K slechts kan worden bekomen wanneer een konstante kapitaalkoëfficiënt wordt aangenomen.

⁽¹⁵⁾ Zie het commentaar van R. Geary op p. 323, op. cit.

⁽¹⁶⁾ Cf. H. Brems : « Constancy of the Proportionate Equilibrium Rate of Growth : Result or Assumption ? », *Review of Economic Studies* (1957), n° 2.

Deze hypotese wordt niet expliciet geformuleerd, doch als resultaat van het oplossen van vergelijkingen (ii)-(v) wordt een konstant groeiritme van 4,7 % geciteerd. Dit impliceert, overeenkomstig bovenstaande formule, een konstante kapitaalkoefficiënt van 2,9 wat plausibel is, doch in tegenstrijd met de basis-hypotese van substitueerbaarheid vervat in (i).

Substitutie van de groeiritmen van kapitaal en arbeid van resp. 4,7 % en 0,17 % in de produktiefunctie (i) en aannemend dat

$$\begin{aligned}f &= 2/3 \\g &= 1/3 \\b &= 0,0225\end{aligned}$$

bekomen we een konstant groeiritme voor Y van :

$$R_Y = \frac{2}{3} 0,0017 + \frac{1}{3} 0,047 + 0,0225 = 3,94 \%$$

Kombinatie van dit groeiritme met het groeiritme van de overblijvende exogene sectoren (volgens een vergelijking niet expliciet in het model opgenomen) levert uiteindelijk een groeiritme op voor Y' van 3,43 % welk betrekkelijk goed overeenkomt met het voorlopig groeiritme van 3,6 % in (ii). Gezien deze twee groeiritmen nagenoeg overeenstemmen, is het model niet overbepaald, en moet geen parameter variabel worden gemaakt ⁽¹⁷⁾.

De konstruktie van het model mag ingenieus genoemd worden, doch is op een bepaald punt van de redenering in tegenstrijd met de basishypoteses van het model. Dit verklaart eveneens waarom uiteindelijk een *konstant* groeiritme gevonden wordt, en geen konvergerend groeiritme, zoals geïmpliceerd in de teoretische oplossingen in de vorige sekties. Verder kan de overbepaalde structuur in andere toepassingen moeilijkheden opleveren, nl. wanneer het uiteindelijk groeiritme afwijkt van het voorlopige uitgedrukt door r . De overbepaaldheid kan dan weggenomen worden door te experimenteren met verschillende waarden van r . Dit impliceert dat r i.p.v. konstante tot variabele zal moeten gemaakt worden.

Oslo, 12 mei 1963.

⁽¹⁷⁾ Dit wordt duidelijk uitgedrukt door voetnota 29 op p. 18: « il faudra évidemment refaire le calcul si l'on trouve finalement que le taux de croissance futur du PNB est très différent de 3,6 %. Ce ne sera pas le cas ici. »