

SUR LE PROBLEME D'APPROVISIONNEMENT DES CENTRALES THERMIQUES

par M. NOE
M.B.L.E., Bruxelles

Introduction.

J. Abadie a exposé l'équivalent du problème suivant (1).

Soient des mines de charbon ($i = 1, 2, \dots, I$), des centrales électriques ($j = 1, 2, \dots, J$) et des tranches d'heures du mois ($k = 1, 2, \dots, K$). Chaque mine a une capacité mensuelle de fourniture d'une quantité de charbon a_i . Chaque centrale a une capacité mensuelle de production lui permettant d'utiliser une quantité de charbon R_j ; elle se caractérise aussi par un rendement η_j (énergie électrique/quantité de charbon). Chaque tranche du mois se caractérise par un nombre d'heures H_k , rapporté au nombre total d'heures du mois et par une demande d'énergie électrique P_k . Chaque transport de charbon d'une mine i vers une centrale j est caractérisé par un coût de transport C_{ij} par unité de quantité de charbon.

Le problème est d'alimenter les centrales et de les faire produire de manière à minimiser le coût total de transport tout en satisfaisant la demande d'énergie électrique.

J. Abadie le résout par la méthode du simplexe dans le cas d'une tranche unique et donne des indications sur la résolution du cas général. Il néglige cependant de faire remarquer que, contrairement au cas du problème de transport simple, les graphes des bases peuvent ici contenir des sous-graphes à cycle. Cette situation, qui peut déjà se présenter dans le cas d'une tranche unique, est la caractéristique la plus importante du présent problème et résulte de l'intervention des rendements η_j différents de l'unité. Certains chercheurs ont résolu le problème par l'application de l'algorithme de Dantzig et Wolfe, lequel est l'adaptation du simplexe au cas où la matrice des coefficients contient beaucoup de zéros et se partitionne en blocs dont l'interdépendance est restreinte. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est nettement trop générale pour le problème présent, donc trop coûteuse.

(1) J. Abadie — Approvisionnement des centrales thermiques et généralisation du problème de transport. *Rev. Fr. Rech. Opér.*, 7, 1958, pp. 94-112.

La généralisation de la solution simplexe du problème de transport simple qui est exposée ci-dessous sera déduite directement du problème posé, sans faire appel explicitement au procédé général du simplexe. En particulier, on n'utilisera pas la notion de dualité qui n'est pas nécessaire. C'est pourquoi on ne garantit pas que les termes utilisés s'assimilent exactement à ceux qui sont employés traditionnellement dans le simplexe.

Certaines contraintes supplémentaires que l'on pourrait songer à introduire, telle une limitation des quantités de charbon transportables, ne compliqueraient pas beaucoup l'algorithme qui sera décrit.

Le réseau de transport du problème actuel est un réseau avec *multiplificateurs*, en ce sens que, au passage par les centrales, les quantités de charbon provenant des mines ne sont pas transmises intégralement en énergie électrique vers les points d'utilisation. La théorie générale de tels réseaux est faite dans (2). La généralisation à ces réseaux des algorithmes de Ford-Fulkerson a été donnée dans (3).

Signalons enfin que la méthode de résolution décrite ci-dessous a été programmée et effectivement employée sur calculatrice ZEBRA. Un des exemples essayés a fait apparaître un sous-graphe isolé à cycle.

Equations du problème.

Soit α_{ij} la quantité de charbon venant d'une mine i à destination d'une centrale j . Soit α_{is} la quantité de charbon qui n'est pas demandée à la mine i et reste disponible. Soit β_{jk} la quantité de charbon utilisée par la centrale j dans la tranche k .

Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \alpha_{is} + \sum_{j=1}^J \alpha_{ij} &= a_i & i = 1, 2, 3, \dots, I \\ \sum_{j=1}^J \eta_j \beta_{jk} &= P_k & k = 1, 2, 3, \dots, K \\ \sum_{i=1}^I \alpha_{ij} - \sum_{k=1}^K \beta_{jk} &= 0 & j = 1, 2, 3, \dots, J \\ 0 &\leq \alpha_{ij} & 0 &\leq \alpha_{is} \\ 0 &\leq \beta_{jk} \leq H_k R_j \end{aligned}$$

(2) C. Berge & A. Ghouila-Houri — Programmes, jeux et réseaux de transport, Dunod 1962.

(3) W.S. Jewell — Optimal flow through networks with gains, *Operations Research*, 10, 1962, pp. 476-499.

Nous appellerons *contraintes* les $(I + J + K)$ premières équations. Sous l'ensemble des conditions, il s'agit de minimiser la *fonction économique* :

$$F = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij} \alpha_{ij}$$

Généralisation du problème du transport simple. Méthode du simplexe.

L'application de la méthode du simplexe conduirait ici aux simplifications propres aux problèmes de transport. La résolution du présent problème sera donc analogue à celle d'un problème de transport simple (4). Les généralisations sont nécessitées par les différences suivantes :

- il intervient trois niveaux i, j, k . au lieu de deux,
- il intervient des coefficients η_j différents de l'unité,
- une partie des variables (les β_{jk}) est bornée non seulement inférieurement mais aussi supérieurement.

Comme on l'a déjà dit, c'est la deuxième différence qui entraîne les généralisations essentielles.

Forme canonique.

On introduit une centrale fictive supplémentaire ($j = s$) vers laquelle se font des transports fictifs correspondant aux disponibilités α_{is} . Les coûts de ces transports doivent évidemment être considérés comme nuls. Il y a alors lieu d'adjoindre aux relations de contrainte la suivante, associée au nœud $j = s$:

$$\sum_{i=1}^I \alpha_{is} - \sum_{k=1}^K \beta_{sk} = 0$$

qui montre que les β_{sk} ne peuvent généralement être tous nuls. Comme aucune énergie électrique n'est débitée par la centrale s , on doit avoir $\eta_s = 0$, et les β_{sk} ont donc une répartition arbitraire.

Bases.

Une *base réalisable*, que nous appellerons simplement *base*, se définit comme un sous-ensemble des variables du problème, en nombre égal au nombre des relations de contrainte, et pouvant prendre des valeurs permises par leurs bornes. Les autres variables sont supposées atteindre exactement une de leurs bornes, et l'ensemble des variables doit satisfaire les relations de contrainte.

(4) M. Simonnard — Programmation Linéaire, Dunod 1962, ch. 11.

On recherchera plus loin une base particulière qui servira de point de départ au calcul. Parmi les β_{sk} , qui sont arbitraires, on convient d'en placer un et un seul dans une base. Le nombre de variables d'une base est donc $(I + J + K + 1)$, le β_{sk} compris.

Graphe d'une base.

On le définit en associant un nœud à chaque mine, chaque centrale, chaque tranche, et en associant une branche à chaque variable de la base. Il contient donc $(I + J + K + 1)$ nœuds et autant de branches.

Ce graphe ne peut généralement contenir aucun arbre isolé car le nombre de variables associées à ses branches serait inférieur au nombre de relations de contrainte y relatives, puisqu'il existe une contrainte par nœud. On peut donc dire que le graphe d'une base se compose d'un certain nombre de sous-graphes isolés l'un de l'autre et contenant chacun un cycle.

Potentiel d'un nœud.

A chaque nœud du graphe d'une base, on associe un *potentiel* défini comme il est décrit ci-après. Introduisons une branche supplémentaire, sans coût, aboutissant au nœud considéré, et faisons abstraction de son autre extrémité. Associons à cette branche une variable x qui peut être un α_{ij} ou un $(-\beta_{jk})$, suivant le type du nœud.

Le potentiel v du nœud est défini par les relations :

$$\text{pour un nœud } i \text{ ou } j : \quad v = - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\text{pour un nœud } k : \quad v = - \frac{\partial F}{\partial (\eta_j x)}$$

les relations de contrainte devant rester satisfaites.

La seule relation de contrainte où intervient la variable x est celle correspondant au nœud considéré, soit

$$\text{pour un nœud } i : \quad \sum_{j=1}^{J+1} \alpha_{ij} = a_i$$

$$\text{pour un nœud } j : \quad \sum_{i=1}^I \alpha_{ij} - \sum_{k=1}^K \beta_{jk} = 0$$

$$\text{pour un nœud } k : \quad \sum_{j=1}^{J+1} \eta_j \beta_{jk} = P_k$$

On voit que, dans ces contraintes, la variable x intervient indépendamment d'un choix particulier. Les potentiels sont donc bien définis de manière unique. Faisons remarquer que ceux-ci correspondent en réalité aux variables du problème dual.

(z — c) d'une branche absente.

Introduisons une branche entre les nœuds 1 et 2 du graphe, supposés non encore reliés, et associons à cette branche la variable x_{12} , laquelle peut être un α_{ij} ou un $(-\beta_{jk})$. Si le coût relatif à cette nouvelle variable est C_{12} , on obtient, suivant le cas, par définition de v_1 et v_2 :

$$-\frac{\partial F}{\partial x_{12}} = \begin{cases} v_1 + v_2 - C_{12} \\ v_1 + \eta_1 v_2 - C_{12} \end{cases}$$

mais C_{12} est toujours nul dans la seconde équation.

Afin de rejoindre les notations habituelles de la méthode du simplexe, définissons $(z - c)_{12}$ comme la diminution de la fonction économique F par unité de variation de la variable nouvelle x_{12} , cette variation se faisant dans un sens qui résulte de la borne que la variable atteignait jusque là. Dans le cas où x_{12} est un $(-\beta_{jk})$ qui se trouvait à sa borne inférieure, cette variable doit nécessairement diminuer et un signe — doit être introduit, de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} (z - c)_{ij} &= v_i + v_j - C_{ij} \\ (z - c)_{jk} &= \pm v_j + \eta_j v_k \end{aligned}$$

le signe — devant être choisi si le β_{jk} se trouvait à sa borne inférieure.

Calcul des potentiels d'une base.

Dans le graphe de la base considérée, prenons une branche (1, 2) associée à la variable y_{12} et à coût x_{12} . Ajoutons-lui une branche supplémentaire en parallèle, associée à la variable supplémentaire x_{12} de même coût. On a, d'après ce qui précède, suivant que (1, 2) est une branche (i, j) ou (j, k) :

$$-\frac{\partial F}{\partial x_{12}} = \begin{cases} v_1 + v_2 - C_{12} \\ v_1 + \eta_1 v_2 \end{cases}$$

Mais puisque les contraintes doivent rester satisfaites, pour des branches inchangées, toutes les variables de ces branches, dont $(y_{12} + x_{12})$, doivent rester inchangées, et il en est donc de même pour la fonction F . D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial x_{12}} = 0$$

On en tire, suivant le cas :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 - C_{12} = 0 \\ v_1 + \eta_1 v_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci peut être écrit pour chaque branche du graphe, ce qui fournit un système de $(I + J + K + 1)$ équations à autant d'inconnues. Une de ces équations est du type :

$$v_s + \eta_s v_k = 0$$

et comme on a vu que $\eta_s = 0$, on doit toujours avoir :

$$v_s = 0$$

On peut alors tout aussi bien laisser tomber la branche β_{sk} du graphe si on retient la relation $v_s = 0$. Cela revient à transformer en arbre le sous-graphe à cycle qui contient le nœud s . Comme en pratique les situations à plusieurs sous-graphes sont rares, cette façon de faire entraîne que le graphe d'une base se ramène la plupart du temps à un arbre. Néanmoins, il est plus facile de raisonner en continuant à ne considérer que des graphes à cycle puisqu'il peut en apparaître.

Le système d'équations des potentiels peut se séparer en plusieurs systèmes partiels indépendants correspondant chacun à un sous-graphe isolé. Dans chacun de ces systèmes partiels, on peut vérifier que la connaissance d'un seul potentiel permet le calcul en chaîne de tous les autres.

Principe de l'algorithme du simplexe pour la minimisation de F.

Une base étant donnée, on introduit dans son graphe une branche nouvelle choisie de manière à rendre possible une diminution de la valeur de F. On fait varier la variable correspondante le plus possible jusqu'à ce qu'une variable du graphe, dont la variation est entraînée par la première sous l'effet des contraintes, atteigne une de ses bornes. Ceci nécessite l'arrêt de la variation de la « variable entrante ».

On retire alors du graphe la branche correspondant à la variable qui a atteint une de ses bornes, c'est-à-dire la « variable sortante », et l'on obtient ainsi le graphe d'une nouvelle base, associée à une valeur plus petite de la fonction économique F.

On recommence ce processus jusqu'à ne plus trouver de variable entrante susceptible de faire diminuer la fonction F. On démontrerait que l'on a alors atteint une solution optimale du problème.

Décrivons plus en détail le calcul d'une itération, en supposant que l'on dispose d'une base de départ.

Recherche de la variable entrante.

Supposant connus tous les potentiels, on calcule les $(z - c)$ de toutes les branches absentes et l'on sélectionne le plus grand. S'il est négatif ou nul, on sait que l'on a obtenu une solution optimale. Sinon l'on introduit dans le graphe la branche correspondante.

Cycle de la variable entrante.

L'introduction de la branche entrante entraîne nécessairement la formation d'un cycle supplémentaire dans le sous-graphe intéressé. Celui-ci contient donc maintenant deux cycles, qui peuvent se déterminer comme expliqué dans l'appendice.

Ces deux cycles, avec éventuellement le chemin qui les joint, déterminent un chemin M sur lequel une variation μ_e de la variable entrante entraîne des variations non nulles μ pour les variables des autres branches de ce chemin. On vérifierait que toutes les autres variables demeurent inchangées.

Si on fixe la valeur de μ_e , celles des autres μ résultent du système formé par les relations de contrainte relatives aux nœuds du chemin M .

La résolution de ce système peut se faire de la manière simple suivante. Sur le chemin M , on choisit un nœud quelconque (par exemple le nœud j de la branche entrante : $[j]$). Sur chacun des deux cycles de ce chemin, on choisit alors une branche quelconque que l'on affecte d'un μ quelconque. Puis on calcule de proche en proche, et des deux côtés, les μ des autres branches du même cycle, à l'aide des relations de contrainte de chaque nœud rencontré. On arrive ainsi, pour chacun des deux cycles, à joindre le nœud $[j]$ de deux façons. La somme des quatre valeurs de μ des branches qui aboutissent à $[j]$ n'est généralement pas nulle alors qu'elle devrait l'être pour satisfaire à la relation de contrainte de ce nœud. Pour l'annuler, il suffit de modifier adéquatement la valeur du μ de départ de l'un des deux cycles. Additionnant alors les μ des branches qui auraient été parcourues deux fois, on obtient la solution du système qui correspond à la valeur μ_e calculée en même temps.

Recherche de la variable sortante.

Ayant résolu le système des μ , on recherche la branche dont la variable atteint la première une de ses bornes. C'est la variable sortante. La valeur absolue la plus grande permise pour μ_e , soit Δ , s'en déduit. On modifie adéquatement toutes les variables à μ non nul et l'on retire du graphe la

branche sortante. Le nouveau graphe est encore celui d'une base, mais est meilleur que celui dont on était parti.

Il est à noter que la variable entrante peut très bien être en même temps la variable sortante (cas d'un β_{jk} passant d'une borne à l'autre).

Fonction économique.

Le processus précédent fait évidemment diminuer la fonction économique F de la quantité :

$$\Delta \cdot (z - c)_{\text{entrant}}$$

Calcul des nouveaux potentiels.

Seuls les potentiels du sous-graphe qui a été mis en cause sont modifiés. D'autre part, on a vu que la connaissance d'un seul potentiel de ce sous-graphe permet le calcul en chaîne de tous les autres. Le calcul d'un tel potentiel peut se faire, sans avoir à résoudre le système, à l'aide de la définition même du potentiel.

Pour cela, considérons le cycle unique contenu dans le sous-graphe après disparition de la branche sortante. Partant d'une branche quelconque de ce cycle, on recommence le calcul des valeurs de μ de proche en proche comme précédemment, jusqu'à aboutir de deux façons au nœud considéré (soit par exemple le nœud $[j]$). Les μ des deux branches qui y aboutissent ont une somme σ généralement non nulle et l'on introduit une branche fictive supplémentaire en $[j]$ associée à une variable $(-\sigma)$ pour satisfaire à la relation de contrainte en ce nœud.

Le calcul de la somme des μ du cycle, multipliés chacun par le coût correspondant, soit $\sum \mu c$, fournit la variation de la fonction F produite par l'introduction de la branche fictive. Une simple division donne donc la valeur du potentiel du nœud $[j]$:

$$v [j] = \frac{\sum \mu c}{-\sigma}$$

On peut noter qu'il arrivera souvent que le cycle subsistant après disparition de la branche sortante sera l'un des deux cycles existant auparavant. Dans ce cas, il est évidemment possible d'utiliser les valeurs de μ déjà calculées sur ces cycles, de sorte que le calcul du potentiel est immédiat. Le test à faire est facile à programmer sur machine.

Le calcul en chaîne des autres potentiels termine l'itération.

Base réalisable initiale.

Une base qui semble économiquement intéressante peut se déterminer directement par les règles suivantes :

1) On détermine les β_{jk} de la base en faisant fonctionner à plein, dans chaque tranche, les centrales aux meilleurs rendements, jusqu'à obtenir l'énergie électrique P_k requise. La dernière centrale sélectionnée dans une tranche ne fonctionnera que partiellement en général, de sorte que le β_{jk} correspondant devra faire partie de la base.

2) On connaît maintenant la quantité totale de charbon nécessaire à chaque centrale j , soit $\sum_k \beta_{jk}$. On détermine les α_{ij} de la base en alimentant d'abord les centrales qui nécessitent le plus de charbon, à l'aide des mines que leur sont les moins coûteuses, à concurrence des disponibilités de ces mines. Les mines qui, après alimentation de toutes les centrales, restent non saturées, font entrer dans la base leur disponibilité résiduelle α_{is} .

On peut vérifier que la base ainsi obtenue répond à la définition donnée plus haut de la base réalisable.

Notons que si la seconde règle donne lieu à une situation qui ne permet plus de trouver le charbon nécessaire, cela indique que le problème posé est sans solution. En effet, les rendements adoptés sont les plus grands possibles.

Appendice — Programmation de la recherche des deux cycles après introduction de la branche entrante.

On choisit un nœud quelconque du sous-graphe considéré. Le plus simple est de choisir le nœud j de la branche entrante, soit $[j]$. On attribue une marque quelconque au nœud $[j]$. On parcourt alors une liste des branches du graphe et lorsqu'on tombe sur une branche dont une extrémité est marquée et non l'autre, on marque cette dernière du numéro de la première. La liste est parcourue autant de fois qu'elle permet un marquage.

Lorsqu'on rencontre une branche dont les deux extrémités sont marquées, on retient cette branche comme branche de référence. On trouvera toujours deux branches de référence.

Les ayant trouvées, on peut parcourir le chemin M contenant les deux cycles, en partant des extrémités des branches de référence et en progressant d'un nœud vers celui dont le numéro est la marque du premier. En même temps on calcule les valeurs des μ à l'aide des relations de contrainte, lesquelles sont très simples. De cette manière, on aboutit forcément au nœud $[j]$ de quatre manières différentes comme expliqué dans le texte. Les branches à μ nul ne sont pas parcourues.